N. Eliseeva

BUNCHES OF PLANES OF THE NORDEN-TIMOFEEV
OF THE H(Π)-DISTRIBUTION

The constructions of planes of the Norden-Timofeev, associate with an internal normal of 1-st kind of H(Π)-distribution are considered. For equipping H-distribution two internal normalizations in sense of the Norden-Timofeev are obtained.

УДК 514.75

О.М. Жовтенко
(Калининградский государственный университет)

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СВЯЗНОСТИ, АССОЦИИРОВАННОЙ С КОНГРУЭНЦИЕЙ ПЛОСКОСТЕЙ

Продолжено исследование групповой связности в расслоении, ассоциированном с конгруэнцией плоскостей [1]. Дана геометрическая характеристика подобъектов этой связности посредством центрального проектирования и параллельных перенесений.

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрено (n-m)-мерное семейство m-мерных плоскостей L_m – конгруэнция плоскостей B_{n-m} [2]. Произведена специализация подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$, при которой вершины A, A_a помещены на плоскость L_m. Система уравнений конгруэнции B_{n-m} в специализированном репере имеет вид:

$$\omega_a^\alpha = \Lambda_{a\beta}^\alpha \omega^\beta \quad (a, b = \overline{1, m}\,;\ \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n}\,).$$

С конгруэнцией B_{n-m} ассоциируется главное расслоение $G_s(B_{n-m})$, базой которого является конгруэнция B_{n-m}, а типовым слоем – s-членная подгруппа стационарности $G_s \subset GP(n)$ $(s = n^2 - nm + m^2 + n + m)$ плоскости L_m, причем проективная группа GP(n) действует в пространстве P_n. Ассоциированное расслоение $G_s(B_{n-m})$ содержит подрасслоение проективных реперов с той же базой, типовым слоем которого является действующая на плоскости L_m проективная фактор-группа GP(m) группы G_s.

В ассоциированном расслоении $G_s(B_{n-m})$ исследуется групповая связность, которая задается по Лаптеву с помощью поля объекта $\Gamma=\{\Gamma^a_\alpha,\ \Gamma^a_{b\alpha},\ \Gamma_{a\alpha},\ \Gamma^\alpha_{\beta\gamma},\ \Gamma^a_{\alpha\beta},\ \Gamma_{\alpha\beta}\}$ на базе B_{n-m}. Совокупность функций $\Gamma_0=\{\Gamma^a_\alpha,\Gamma^a_{b\alpha},\Gamma_{a\alpha}\}\subset\Gamma$ образует подобъект проективной связности.

Произведено оснащение Бортолотти конгруэнции, состоящее в присоединении к плоскости L_m (n-m-1)-плоскости P_{n-m-1}, не имеющей с ней общих точек. Оно определяется оснащающим квазитензором $\lambda=\{\lambda^a_\alpha,\lambda_\alpha\}$. Фундаментальный объект первого порядка $\Lambda^\alpha_{a\beta}$ конгруэнции плоскостей и оснащающий квазитензор λ позволяют охватить компоненты объекта связности Γ двумя способами. В первом случае получен охват компонент объекта связности $\overset{1}{\Gamma}=\{\overset{0}{\Gamma}{}^a_\alpha,\overset{0}{\Gamma}_{a\alpha},\overset{0}{\Gamma}{}^c_{b\alpha},\overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma},\overset{1}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta},\overset{1}{\Gamma}_{\alpha\beta}\}$ по формулам [2]:

$$\begin{cases} \overset{0}{\Gamma}{}^a_\alpha=\lambda^a_\alpha,\ \ \overset{0}{\Gamma}{}^a_{b\alpha}=\Lambda^\beta_{b\alpha}\lambda^a_\beta-\delta^a_b\lambda_\alpha,\ \ \overset{0}{\Gamma}_{a\alpha}=\Lambda^\beta_{a\alpha}\lambda_\beta, \\ \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}=-\Lambda^\alpha_{a\gamma}\lambda^a_\beta-\delta^\alpha_\beta\lambda_\gamma-\delta^\alpha_\gamma\lambda_\beta, \end{cases} \tag{1}$$

$$\overset{1}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta}=-\lambda^a_\gamma M^\gamma_{\alpha\beta},\overset{1}{\Gamma}_{\alpha\beta}=-\lambda_\gamma M^\gamma_{\alpha\beta},$$

где $M^\gamma_{\alpha\beta}=\Lambda^\gamma_{b\beta}\lambda^b_\alpha+\delta^\gamma_\beta\lambda_\alpha$. Во втором случае объект связности $\overset{2}{\Gamma}=\{\overset{0}{\Gamma}{}^a_\alpha,\overset{0}{\Gamma}_{a\alpha},\overset{0}{\Gamma}{}^a_{b\alpha},\overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma},\overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta},\overset{2}{\Gamma}_{\alpha\beta}\}$ охвачен по формулам (1) и следующим:

$$\overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta}=\lambda^a_{\alpha\beta}+\lambda^a_\gamma\overset{0}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}-\lambda^b_\alpha\overset{0}{\Gamma}{}^a_{b\beta}-\lambda_\alpha\overset{0}{\Gamma}{}^a_\beta;\ \ \overset{2}{\Gamma}_{\alpha\beta}=\lambda_{\alpha\beta}+\lambda_\gamma\overset{0}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}-\lambda^a_\alpha\overset{0}{\Gamma}_{a\beta}.$$

Таким образом, оснащение Бортолотти конгруэнции плоскостей B_{n-m} индуцирует два типа групповой связности с объектами $\overset{1}{\Gamma}$ и $\overset{2}{\Gamma}$ в ассоциированном расслоении $G_s(B_{n-m})$.

Теорема 1. *Подобъект* $\overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}$ *охваченных объектов связности* $\overset{1}{\Gamma}$ *и* $\overset{2}{\Gamma}$ *характеризуется центральным проектированием плоскости* $P_{n-m-1}+dP_{n-m-1}$, *смежной с плоскостью* P_{n-m-1}, *на исходную плоскость* P_{n-m-1} *из центра – образующей плоскости* L_m.

Доказательство. Плоскость P_{n-m-1} определяется системой точек

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A.$$

Учитывая формулы (1), приведем дифференциалы точек B_α, входящих в совокупность точек, определяющих смежную плоскость P_{n-m-1}+ dP_{n-m-1}, к виду

$$dB_\alpha = (\theta - \lambda_\beta \omega^\beta) B_\alpha + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}^\beta_\alpha B_\beta + (\lambda_{\alpha\beta}\omega^\beta - \lambda_\beta \lambda^a_\alpha \Lambda^\beta_{a\gamma}\omega^\gamma - \lambda_\alpha \lambda_\beta \omega^\beta) A +$$

$$+ (\lambda^a_{\alpha\beta}\omega^\beta - \lambda^a_\beta \lambda^b_\alpha \Lambda^\beta_{b\gamma}\omega^\gamma - \lambda^a_\beta \lambda_\alpha \omega^\beta) A_a,$$

где $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^\beta_\alpha = \omega^\beta_\alpha - \overset{0}{\Gamma}{}^\beta_{\alpha\gamma}\omega^\gamma$. Проекция плоскости, смежной с плоскостью Бортолотти P_{n-m-1}, на плоскость P_{n-m-1} из центра – плоскости L_m – определяется формами $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^\beta_\alpha$, которые, в свою очередь, выражаются с помощью подобъекта связности $\overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}$.

Теорема 2. *Охваченный подобъект проективной связности* $\{\overset{0}{\Gamma}{}^a_\alpha, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{b\alpha}, \overset{0}{\Gamma}_{a\alpha}\}$ *характеризуется центральным проектированием плоскости L_m + dL_m, смежной с плоскостью L_m, на последнюю из центра – плоскости Бортолотти P_{n-m-1}.*

Доказательство. Плоскость L_m определяется системой точек A_a, A. Дифференциалы этих точек входят в состав точек, определяющих смежную плоскость $L_m + dL_m$, и имеют вид

$$dA = (\theta - \lambda_\alpha \omega^\alpha) A + \omega^\alpha B_\alpha + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}^a A_a,$$

$$dA_a = (\theta - \lambda_\alpha \omega^\alpha) A_a + \omega^\alpha_a B_\alpha + \overset{0}{\tilde{\omega}}_a A + \overset{0}{\tilde{\omega}}{}^b_a A_b,$$

где $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^a = \omega^a - \overset{0}{\Gamma}{}^a_\alpha \omega^\alpha$, $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^b_a = \omega^b_a - \overset{0}{\Gamma}{}^b_{a\alpha}\omega^\alpha$, $\overset{0}{\tilde{\omega}}_a = \omega_a - \overset{0}{\Gamma}_{a\alpha}\omega^\alpha$. Проекция плоскости, смежной с плоскостью L_m, на исходную плоскостью L_m из центра – плоскости P_{n-m-1} – определяется формами связности $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^a$, $\overset{0}{\tilde{\omega}}_a$, $\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^b_a$, которые, в свою очередь, выражаются с помощью компонент подобъекта проективной связности $\{\overset{0}{\Gamma}{}^a_\alpha, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{b\alpha}, \overset{0}{\Gamma}_{a\alpha}\}$.

Неохваченные подобъекты $\{\Gamma^a_\alpha, \Gamma^a_{b\alpha}, \Gamma_{a\alpha}\}$, $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ объекта связности Г можно охарактеризовать при помощи следующих параллельных перенесений.

Теорема 3. *Подобъект* $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ *характеризуется параллельным перенесением точки В, принадлежащей плоскости P_{n-m-1}, т. е. ее смещением в (m+1)-мерной плоскости, натянутой на эту точку и плоскость L_m.*

Доказательство. Возьмем точку В в плоскости P_{n-m-1}. Ее разложение имеет вид $B = \xi^\alpha B_\alpha$, причем $\Delta\xi^\alpha - \xi^\alpha \upsilon = \xi^\alpha_\beta \omega^\beta$, где форма υ играет роль множителя пропорциональности, а $\Delta\xi^\alpha = d\xi^\alpha + \xi^\beta \omega^\alpha_\beta$.
Дифференциал точки В приводится к виду

$$dB = (\theta - \lambda_\beta \omega^\beta)B + \xi^\alpha(\lambda_{\alpha\beta}\omega^\beta - \lambda_\beta \lambda^a_\alpha \Lambda^\beta_{a\gamma}\omega^\gamma - \lambda_\alpha \lambda_\beta \omega^\beta)A + \xi^\alpha(\lambda^a_{\alpha\beta}\omega^\beta -$$

$$- \lambda^a_\beta \lambda^b_\alpha \Lambda^\beta_{b\gamma}\omega^\gamma - \lambda^a_\beta \lambda_\alpha \omega^\beta)A_a + (\Delta\xi^\alpha - \xi^\beta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma)B_\alpha .$$

Условия смещений точки В в (m+1)-плоскости, натянутой на эту точку и плоскость L_m, имеют вид

$$\Delta\xi^\alpha - \xi^\beta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma = \xi^\alpha \upsilon .$$

Утверждение теоремы следует из этого выражения.

Теорема 4. *Подобъект проективной связности* $\{\Gamma^a_\alpha, \Gamma^a_{b\alpha}, \Gamma_{a\alpha}\}$ *характеризуется параллельным перенесением точки С, принадлежащей плоскости L_m, т. е. ее смещением в (n-m)-мерной плоскости, натянутой на эту точку и плоскость Бортолотти P_{n-m-1}.*

Доказательство. Берем точку С, принадлежащую плоскости L_m. Разложение точки имеет вид $C = A + \xi^a A_a$, причем

$$\Delta\xi^a - \xi^a \xi^b \omega_b + \omega^a = \xi^a_\alpha \omega^\alpha, \ \ \Delta\xi^a = d\xi^a + \xi^b \omega^a_b .$$

Дифференциал точки С приводится к виду

$$dC = (\theta + \xi^a \omega_a - \lambda_\alpha \omega^\alpha - \xi^a \lambda_\alpha \Lambda^\alpha_{a\beta}\omega^\beta)C + (\omega^\alpha + \xi^a \Lambda^\alpha_{a\beta}\omega^\beta)B_\alpha +$$

$$+ (\Delta\xi^a + \omega^a - \Gamma^a_\alpha \omega^\alpha + \xi^a \xi^b (\Gamma_{b\beta}\omega^\beta - \omega_b) - \xi^b \Gamma^a_{b\beta}\omega^\beta)A_a .$$

Условия смещений точки $C \in L_m$ в (n-m)-плоскости, натянутой на эту точку и плоскость P_{n-m-1}, имеют вид

$$\Delta\xi^a + \omega^a + \xi^a \xi^b (\Gamma_{b\beta}\omega^\beta - \omega_b) - \Gamma^a_\alpha \omega^\alpha - \xi^b \Gamma^a_{b\beta}\omega^\beta = \xi^a \upsilon .$$

Откуда следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. *Жовтенко О.М.* Роль оснащения Бортолотти конгруэнции плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2000. Вып. 31. С. 14 – 19.

2. *Близникас В.И.* Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 43 – 110.

3. *Шевченко* Ю.И. Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1978. Вып. 9. С. 124 – 133.

4. *Лумисте Ю.Г.* Проективные связности в канонических расслоениях многообразий плоскостей // Мат. сб.1973. Т. 91. Вып. 2. С. 211 – 233.

O. Zhovtenko

GEOMETRICAL INTERPRETATION OF THE CONNECTION, ASSOCIATED WITH THE CONGRUENCE OF PLANES

The research of group connection in the bundle associated with the congruence of planes is continued [1]. The geometrical performance of subobjects of this connection by means of the central projection and parallel displacements is given.

Работа поддержана грантом Минобразования РФ (СПб.КЦФЕ), кандидатский проект М03–2.1К–315.

УДК 514.76

В.А. Игошин, Е.К. Китаева
(Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского)

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ КВАДРАТИЧНЫХ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

В качестве приложения геометрического (геодезического, пульверизационного) моделирования [1] получен ряд результатов о подвижности и геометрических характеристиках квадратичных квазигеодезических потоков (КП) ненулевой кривизны. В частности, доказана теорема существования (теорема 2) и теоремы 3, 4 о полях абсолютного параллелизма в пространстве событий квазигеодезических потоков исследуемого класса.