ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.11 1980

Е.В.Скрыдлова, А.В.Говорков

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ КВАДРИКОЙ И ТОЧКОЙ

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается класс вырожденных [1] конгруэнций $(Q,P)_{1,2}$, порожденных квадрикой Q и точкой P, причем квадрика описывает однопараметрическое семейство, а точка-двупараметрическое семейство (поверхность).

В вырожденных конгруэнциях $(Q,P)_{1,2}$ каждой точке P ставится в соответствие единственная квадрика Q, полным прообразом которой является некоторая линия Γ_Q на поверхности (P).

Пусть τ -касательная плоскость к поверхности (P) в точке P, а π -плоскость, полярно сопряженная точке P относительно соответствующей ей квадрики Q. Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$, в котором вершина A_0 совпадает с точкой P, вершины A_1, A_2 являются точками квадрики Q, принадлежащими линии пересечения плоскостей τ и π, а вершина A_3 является полюсом плоскости τ относительно квадрики.

Уравнение квадрики Q и система пфаффовых уравнений конгруэнции $(Q,P)_{1,2}$ относительно построенного репера, с учетом некоторой нормировки его вершин, запишутся соответственно в виде:

$$(x^3)^2+(x^0)^2-2x^1x^2=0, \qquad (1)$$

$$\omega_i^j=\Gamma_i^j\omega_3^0,\ \omega_i^0=\Gamma_i^0\omega_3^0+\omega^j,\ \omega_3^i=\Gamma_3^i\omega_3^0+\omega_j^3,$$

$$\omega_3^3-\omega_0^0=q\,\omega_3^0,\ \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3=p\,\omega_3^0,\ \omega_0^3=0, \qquad (2)$$

$$\omega_1^3=\alpha\omega^1+\beta\omega^2,\ \omega_2^3=\beta\omega^1+\gamma\omega^2,\ \omega_3^0=\lambda_k\omega^k.$$

Формы $\omega_0^i \overset{def}{=} \omega^i$ здесь приняты в качестве базисных, $i,j,k=1,2$, причем $i\neq j$. Предполагается также, что $\omega_3^0\neq 0$, т.е. класс конгруэнций $(Q,P)_{1,2}$, в котором вершина A_3 является характеристической точкой плоскости π, из рассмотрения исключен.

Последнюю нормировку вершин репера R осуществим таким образом, чтобы единичная точка $E_{1,2}=A_1+A_2$ прямой A_1A_2 принадлежала касательной к линии Γ_Q в точке P. Тогда

$$\omega_3^0=\lambda(\omega^1-\omega^2),\ \lambda\neq 0, \qquad (3)$$

$$\omega_1^1-\omega_2^2=\varphi_k\omega^k. \qquad (4)$$

Пусть C -коника, являющаяся линией пересечения квадрики Q с плоскостью τ. Уравнения коники C имеют вид:

$$(x^0)^2-2x^1x^2=0,\ \ x^3=0. \qquad (5)$$

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $(Q,P)_{1,2}^0$ назовем конгруэнцию $(Q,P)_{1,2}$, для которой конгруэнция коник C расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) и координатная сеть на поверхности (P) является асимптотической.

Т е о р е м а 1. Конгруэнция $(Q,P)_{1,2}^0$ существует и определяется вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия, определяющие конгруэнцию $(Q,P)_{1,2}^0$, аналитически записываются в виде

$$\omega^i\wedge\omega_j^i=0, \qquad (6)$$

$$\omega_i^0\wedge\omega^j+\omega_i^3\wedge\omega_3^j=0, \qquad (7)$$

$$\omega^i\wedge\omega_i^j+(\omega_i^i+\omega_j^j-2\omega_0^0)\wedge\omega^j=0, \qquad (8)$$

$$\omega_i^0\wedge\omega^i-\omega_j^0\wedge\omega^j+\omega_i^3\wedge\omega_3^i-\omega_j^3\wedge\omega_3^j+2\omega^i\wedge\omega^j=0, \tag{9}$$

(по индексам i,j не суммировать!),

$$\omega_i^3=\beta\,\omega^j \quad (\alpha=\gamma=0). \tag{10}$$

Из уравнений (6) имеем

$$\omega_i^j=0. \tag{11}$$

Тогда из квадратичных равенств (8) получим уравнение

$$\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_0^0=0, \tag{12}$$

замыкание которого дает

$$3\omega_k^0\wedge\omega^k+\omega_k^3\wedge\omega_3^k=0 \tag{13}$$

Условия (7) приводят к соотношениям

$$\Gamma_i^0=\beta\,\Gamma_3^i \tag{14}$$

Осуществляя частичное продолжение системы (10), получим

$$d\beta+\beta\,(\omega_3^3-\omega_0^0)=0, \tag{15}$$

$$\omega_k^0\wedge\omega^k-\omega_k^3\wedge\omega_3^k=0. \tag{16}$$

Из равенств (9),(13),(16) находим

$$\Gamma_3^1=-\Gamma_3^2\overset{def}{=\!=}b, \quad \beta+2\lambda b=0. \tag{17}$$

В силу полученных соотношений имеем

$$\omega_3^i=\frac{\beta}{2}(\omega^i+\omega^j), \quad \omega_i^0=\frac{\beta^2}{2}(\omega^i-\omega^j)+\omega^j. \tag{18}$$

Замыкая уравнения (18), получим

$$\varphi_1=\varphi_2\overset{def}{=\!=}\varphi, \quad \varphi\beta+2\lambda=0, \quad \varphi\beta-2\lambda-4\beta\lambda q=0, \tag{19}$$

откуда

$$\beta q+1=0, \quad \varphi=-\frac{2\lambda}{\beta}. \tag{20}$$

Осуществляя частичное продолжение уравнений

$$\beta(\omega_2^2-\omega_1^1)=2\lambda(\omega^1+\omega^2), \quad \omega_3^0=\lambda(\omega^1-\omega^2), \tag{21}$$

находим

$$d\lambda-\left(\frac{2\lambda^2}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right)(\omega^1-\omega^2)=0. \tag{22}$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции $(Q,P)_{1,2}^0$, таким образом, окончательно запишется в виде:

$$\begin{gathered}\omega_i^j=0, \quad \omega_i^3=\beta\,\omega^j, \quad \omega_3^i=\frac{\beta}{2}(\omega^i+\omega^j), \quad \omega_0^3=0,\\ \omega_3^0=\lambda(\omega^1-\omega^2), \quad \omega_i^0=\frac{\beta^2}{2}(\omega^i-\omega^j)+\omega^j, \quad \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_0^0=0,\\ \beta(\omega_0^0-\omega_3^3)=\omega_3^0, \quad \beta(\omega_2^2-\omega_1^1)=2\lambda(\omega^1+\omega^2), \quad d\beta=\omega_3^0,\\ d\lambda-\left(\frac{2\lambda^2}{\beta}+\frac{\beta}{2}\right)(\omega^1-\omega^2)=0.\end{gathered} \tag{23}$$

Замыкание системы (23) удовлетворяется тождественно, что и доказывает теорему.

Т е о р е м а 2. Конгруэнция $(Q,P)_{1,2}^0$ обладает следующими геометрическими свойствами: 1/ вершины A_i и A_3 репера являются характеристическими точками соответственно плоскостей $(A_0A_iA_3)$ и $(A_0E_{1,2}A_3)$; 2/ фокусы прямой A_1A_2 гармонически разделяют вершины A_1 и A_2; 3/ поверхности (A_0) и (A_i) являются одной и той же инвариантной квадрикой F; 4/ асимптотические касательные к квадрике F в точках A_i попарно пересекаются в точках прямой A_0A_3; 5/ прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) односторонне расслояема к конгруэнции (A_1A_2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Находя касательные плоскости к поверхностям (A_i) и (A_3), убедимся, что они совпадают соответственно с плоскостями $(A_0A_iA_3)$ и $(A_0E_{1,2}A_3)$, что и доказывает утверждение теоремы. 2/ Фокальные точки sA_1+tA_2 прямой A_1A_2 определяются уравнением

$$s^2-t^2=0,$$

откуда следует утверждение 2-й теоремы.

3/Рассмотрим квадрику F ,определяемую уравнением

$$F\equiv(\beta^2-1)(x^3)^2+2\beta x^0x^3-2\beta^2x^1x^2=0.$$

Имеем

$$dF=\theta F,$$

где θ -некоторая форма пропорциональности.Т. е. квадрика F инвариантна.Так как точки A_0 и A_i принадлежат квадрике F ,то поверхности (A_0) и (A_i) совпадают с этой квадрикой.

4/Асимптотические линии поверхности (A_i) определяются уравнением

$$\omega^j(\beta^2\omega^i+\omega^j)=0.$$

Имеем

$$dA_i\Big|_{\omega^j=0}=\omega_i^iA_i+\frac{\beta^2}{2}\omega^iA_0,$$

$$dA_i\Big|_{\beta^2\omega^i+\omega^j=0}=\omega_i^iA_i+\frac{\beta^2}{2}\omega^i\left((\beta^2-1)A_0-2\beta A_3\right),$$

что и доказывает утверждение 4.

5/Условия одностороннего расслоения от прямолинейной конгруэнции (A_0A_3) к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2)

$$\omega_3^k\wedge\omega_k^0=0,\qquad \omega^k\wedge\omega_k^3=0,$$

$$\omega^k\wedge\omega_k^0-\omega_3^k\wedge\omega_k^3=0$$

тождественно удовлетворяются в силу системы уравнений (23).Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Фокальными точками коники C являются вершины репера A_i ,а также точки пересечения коники C с касательной к линии Γ_Q на поверхности (P) и с прямой,гармонически разделяющей вместе с касательной к Γ_Q координатную сеть на этой поверхности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы следует из анализа системы уравнений

$$x^1x^2(x^1-x^2)^2(x^1+x^2)^2=0,\quad (x^0)^2-2x^1x^2=0,\quad x^3=0,$$

определяющей фокальные точки коники C .

Рассмотрим конику C_1 ,являющуюся линией пересечения квадрики Q с плоскостью π .Фокальные точки коники C_1 определяются системой уравнений

$$x^1x^2(x^1+x^2)^2\left((x^1-x^2)^2-\frac{8\lambda^2}{\beta^4}x^1x^2\right)=0,\qquad (24)$$
$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^0=0$$

Т е о р е м а 4.Вершины A_i ,а также точки пересечения коники C_1 с прямой,проходящей через A_3 и характеристическую точку плоскости π ,являются фокальными точками этой коники.

Доказательство теоремы следует из анализа системы (24) с учетом того,что характеристическая точка M плоскости π задается формулой

$$M=\lambda(A_1-A_2)+(1-\beta)A_3.$$

Список литературы

I.М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. -В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3.Калининград,1973,с.41-49.