КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Вып.10 1979

УДК 513.73

А.С.Лазарев

О ЧАСТИЧНО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В E_n.

1.Поверхность V_p евклидова пространства E_n отнесем к подвижному реперу $\{x, \vec e_i, \vec e_\alpha\}$, где $x \in V_p$, единичные векторы $\vec e_i$ $(i, j, k = 1, 2, \dots, p)$ параллельны касательной плоскости $T_p(x)$ к поверхности V_p в ее точке x, а векторы $\vec e_\alpha$ $(\alpha, \beta, \gamma = p+1, \dots, n)$ образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения $N_{n-p}(x)$ касательной плоскости $T_p(x)$. Деривационные формулы подвижного репера имеют вид:

$$d\vec x = \omega^i \vec e_i,$$

$$d\vec e_i = \omega_i^j \vec e_j + \omega_i^\alpha \vec e_\alpha,$$

$$d\vec e_\alpha = \omega_\alpha^i \vec e_i + \omega_\alpha^\beta \vec e_\beta.$$

Имеем $\omega^\alpha = 0$, откуда получим $\omega_i^\alpha = b^\alpha_{ij}\omega^j$, $b^\alpha_{ij} = b^\alpha_{ji}$. Здесь b^α_{ij} -второй основной тензор поверхности V_p. Дифференцирование тождеств $\vec e_m \vec e_\alpha = \delta_{m\alpha}$ $(m = 1, 2, \dots, n)$ приводит к соотношениям $\omega^\alpha_\beta + \omega^\beta_\alpha = 0$, $\omega^\alpha_i + \gamma_{ij}\,\omega^j_\alpha = 0$, где γ_{ij} -метрический тензор поверхности V_p.

Пусть в нормальном расслоении задано гладкое поле вектора $\vec{xy}$, тогда точка y описывает гладкую поверхность (y). Пусть $\dim(y) = p$, тогда отображение $f: V_p \to (y) \mid x \to y, \forall x \in V_p$ полного ранга. Поверхность (y) может быть задана уравнением

$$\vec y = \vec x + y \vec e_n, \tag{1}$$

где $\vec e_n \parallel \vec{xy}$. Условие инвариантности вектора $\vec{xy}$ имеет вид

$$\delta y = 0, \quad \pi^i_n = \omega^i_n\big|_{\omega^i = 0} = 0, \quad \pi^\alpha_n = \omega^\alpha_n\big|_{\omega^i = 0} = 0.$$

Это означает, что $y = y(x)$, а формы ω^i_n, ω^α_n главные. Пусть

$$\omega^\alpha_n = c^\alpha_{ni}\,\omega^i. \tag{2}$$

Дифференцирование тождества (2) и разрешение по лемме Картана полученных квадратичных уравнений дает выражение

$$dc^\beta_{nj} + c^\alpha_{nj}\,\omega^\beta_\alpha - c^\beta_{ni}\,\omega^i_j + \gamma^{il} b^n_{lk} b^\beta_{ij}\,\omega^k = c^\beta_{njk}\,\omega^k. \tag{3}$$

При дифференцировании по вторичным параметрам имеем

$$\theta^\beta_j = \delta^\beta_{nj} + c^\alpha_{nj}\,\pi^\beta_\alpha - c^\beta_{ni}\,\pi^i_j = 0,$$

причем система уравнений Пфаффа $\theta^\beta_j = 0$ вполне интегрируема. Следовательно, величины c^β_{nj} образуют тензор.

О п р е д е л е н и е. Поверхности V_p и (y) назовем частично параллельными, если направляющие подпространства $T^\circ_p(x)$ и $T^\circ_p(y)$ их касательных плоскостей $T_p(x)$ и $T_p(y)$ имеют непустое пересечение T°. Если $\dim T^\circ = l$, то поверхности V_p и (y) будем называть $\frac{l}{p}$ -параллельными. Число $\frac{l}{p}$ назовем степенью параллельности этих поверхностей.

В случае $l = p$ поверхности называются просто параллельными [1]. В [2] имеется аналогичное определение частичной параллельности плоскостей многомерного пространства.

Вычислим

$$d\vec y = \{(\delta^i_k - y\gamma^{ij} b^n_{jk})\vec e_i + y c^\alpha_{nk}\vec e_\alpha + y_k \vec e_n\}\omega^k, \tag{4}$$

где $dy = y_k\omega^k$. Векторы

$$\vec a_k = (\delta^i_k - y\gamma^{ij} b^n_{jk})\vec e_i + y c^\alpha_{nk}\vec e_\alpha + y_k \vec e_n$$

4 Зак. 3728

линейно независимы и являются базисом направляющего подпространства $T^\circ_p(y)$. Так как $\dim(T^\circ_p(x)\cap T^\circ_p(y)) = 2p - \dim(T^\circ_p(x)\cup T^\circ_p(y))$, то

$$\dim(T^\circ_p(x)\cap T^\circ_p(y)) = p - \mathrm{rang}\,\|C^\alpha_{nk}, y_k\|.$$

Следовательно, справедлива следующая

Т е о р е м а 1. Поверхности V_p и (y) $\frac{\ell}{p}$-параллельны тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{rang}\,\|C^\alpha_{nk}, y_k\| = p-\ell. \qquad (5)$$

Перенумеруем векторы $\vec{e}_i$ так, чтобы последние $p-\ell$ строк указанной матрицы были линейно независимыми, тогда найдутся функции $\lambda^{i''}_{i'}$ $(i', j', k' = 1, 2, \dots, \ell;\ i'', j'', k'' = \ell+1, \dots, p)$ такие, что

$$C^\alpha_{ni'} = \lambda^{i''}_{i'} C^\alpha_{ni''}, \quad y_{i'} = \lambda^{i''}_{i'} y_{i''}.$$

Вычислим

$$dy = y_{i''}(\omega^{i''} + \lambda^{i''}_{i'}\omega^{i'}), \quad \omega^\alpha_n = C^\alpha_{ni''}(\omega^{i''} + \lambda^{i''}_{i'}\omega^{i'}).$$

Преобразуем векторы $\vec{e}_i$ подвижного репера так, что $\vec{e}_i = \lambda^j_i \vec{e}_j$, где λ^j_i образуют матрицу

$$\|\lambda^j_i\| = \left\|\begin{array}{c|c} \delta^{j'}_{i'} & \lambda^{i''}_{i'} \\ \hline 0 & \delta^{i''}_{j''} \end{array}\right\|.$$

В новом репере имеем $\tilde{\omega}^{i'} = \omega^{i'}$, $\tilde{\omega}^{i''} = \omega^{i''} + \lambda^{i''}_{i'}\omega^{i'}$,

$$\omega^\alpha_n = C^\alpha_{ni''}\omega^{i''}, \quad C^\alpha_{ni'} = 0, \quad dy = y_{k''}\tilde{\omega}^{k''}, \quad y_{k'} = 0. \qquad (6)$$

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 2. Поверхности V_p и (y) $\frac{\ell}{p}$-параллельны тогда и только тогда, когда на поверхности V_p существует подвижной репер, относительно которого $C^\alpha_{ni'} = 0$, $y_{k'} = 0$.

Геометрически тождество $y_{k'} = 0$ означает, что $y = \mathrm{const}$ при смещении x вдоль любой интегральной кривой распределения $\Delta_\ell: x \to T^\circ_\ell(x), \forall x \in V_p$, где $T^\circ_\ell(x)$ -векторное пространство с базисом $\{\vec{e}_{i'}\}$. Зафиксируем на поверхности V_p сеть так, что векторы $\vec{e}_{i'}$, касательные к линиям $\omega^{i'}$, в каждой точке $x \in V_p$ образуют базис векторного пространства $T^\circ_\ell(x)$. Тогда формы $\omega^{i''}_{i'}$ главные. Пусть $\omega^{i''}_{i'} = a^{i''}_{i'j}\omega^j$.

Т е о р е м а 3. Распределение Δ_ℓ вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда

$$\gamma^{i\ell}(b^n_{\ell j'} b^\alpha_{ik'} - b^n_{\ell k'} b^\alpha_{ij'}) = 0. \qquad (7)$$

Действительно, из формул (3), используя условия (6), получим

$$C^\alpha_{ni''}(a^{i''}_{j'k'} - a^{i''}_{k'j'}) = \gamma^{i\ell}(b^n_{\ell k'} b^\alpha_{ij'} - b^n_{\ell j'} b^\alpha_{ik'}). \qquad (8)$$

Продолжение тождества $dy = y_{k''}\omega^{k''}$ дает выражение

$$y_{i''}(a^{i''}_{j'k'} - a^{i''}_{k'j'}) = 0.$$

Так как $\mathrm{rang}\,\|C^\alpha_{ni''}, y_{i''}\| = p-\ell$, то $a^{i''}_{j'k'} - a^{i''}_{k'j'} = 0$.
Из последних соотношений следует утверждение теоремы.

Распределение Δ_ℓ назовем распределением, порождающим $\frac{\ell}{p}$-параллельность. Геометрическая характеристика распределения Δ_ℓ следует из равенства (4), откуда видно, что

$$\Delta_\ell(x) = \{d\vec{x} \mid d\vec{y} \,\|\, T_p(x)\}.$$

Можно показать, что вектор $\overrightarrow{xy}$ вдоль любой интегральной кривой распределения Δ_ℓ переносится параллельно.

2. Рассмотрим задачу, приводящую к частичной параллельности поверхностей. Пусть V_p -произвольная поверхность, а σ -семейство одномерных нормалей поверхности V_p. Как множество точек σ есть $(p+1)$-мерная поверхность, уравнение которой имеет вид $\vec{t}=\vec{x}+t\vec{e}_n$, где t -независимое переменное, а вектор $\vec{e}_n$ подвижного репера параллелен в каждой точке $x\in V_p$, одномерной нормали семейства σ, проходящей через эту точку. Имеем:

$$d\vec{t}=a_k\omega^k+dt\vec{e}_n\,,\ \text{где}$$

$$\vec{a}_k=(\delta^i_k+t\gamma^{ij}b^n_{jk})\vec{e}_i+tc^{\alpha}_{nk}\vec{e}_\alpha\,.$$

Возьмем произвольную линию ω^{k_0} как-либо фиксированной координатной сети. Множество точек $\sigma^2_{k_0}$ одномерных нормалей, проходящих через линию ω^{k_0}, является двумерной линейчатой поверхностью, касательная плоскость в каждой точке которой параллельна векторам $\vec{a}_{k_0}, \vec{e}_n$. Для того, чтобы касательная плоскость к поверхности $\sigma^2_{k_0}$ в каждой точке одномерной нормали была постоянной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $\partial\vec{a}_{k_0}/\partial t \parallel \vec{a}_{k_0}$, которое равносильно соотношениям

$$\gamma^{\tilde{i}j}b^n_{jk_0}=0\,,\quad c^{\alpha}_{nk_0}=0\quad (\tilde{i}=1,2,\dots,k_0-1,k_0+1,\dots,p).\ (9)$$

Первое из равенств (9) говорит о том, что линия ω^{k_0} включена в состав линий кривизны относительно нормали семейства σ. Второе - условие того, что поверхность V_p допускает $\frac{1}{p}$ -параллельную поверхность (y), а одномерное распределение касательных к линиям семейства ω^{k_0} является порождающим для указанной частичной параллельности. Кроме того, из равенства (4) следует, что при смещении вдоль линии ω^{k_0} $d\vec{y}\parallel d\vec{x}$. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы семейство σ одномерных нормалей $(x,\vec{e}_n)$ поверхности V_p расслаивалось ℓ способами на развертывающиеся поверхности, необходимо и достаточно, чтобы поверхность V_p допускала $\frac{\ell}{p}$-параллельную

поверхность (y) : $\vec{y}=\vec{x}+y\vec{e}_n$, а распределение Δ_ℓ порождающее эту параллельность, содержало ℓ главных направлений тензора b^n_{ij}.

Список литературы

1. А к и в и с М.А. Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.

2. Ш и р о к о в П.А. Тензорное исчисление. Казань, 1961