УДК 530.145

А. А. Иванов, А. И. Иванов

РЕКОНСТРУКЦИЯ СОСТОЯНИЯ КУБИТА ПРИ НЕЧЕТКИХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Построен оператор эволюции объединенной системы, состоящей из измеряемого кубита и вспомогательной системы. Получены ограничения на выбор параметров в формуле для реконструкции состояний измеряемого кубита. Показано, что оператор эволюции объединенной системы приводит к оператору вероятности (или эффекту) со структурой, которая соответствует нечетким измерениям.

Evolution operator of a combined system consisting of the measured qubit and the auxiliary system is derived. Conditions on the choice of parameters in the formula for the reconstruction of the measured qubit states are obtained. The evolution operator of the combined system leads to the probability operator (or effect) with a structure that corresponds to unsharp measurements.

Ключевые слова: кубит, квантовые измерения, реконструкция сигнала, время измерения.

Key words: qubit, quantum measurement, signal reconstruction, measurement time.

Кубит — это основа построения большинства квантовых схем обработки информации. Способность манипулировать квантовым состоянием одного или нескольких кубитов для выполнения требуемых операций квантовых вычислений зависит от ряда факторов. В данной статье мы сосредоточим свое внимание на реконструкции состояний кубита при помощи последовательности проективных измерений. Использование проективных измерений для характеристики динамики кубита не новая идея, ее эффективность была продемонстрирована и для одного и для двух кубитов (например, [1—3]). В работе [4] обсуждается применение классического метода. Наибольший интерес имеет реконструкция состояний кубита в случае нежестких измерений.

Стандартным подходом к реконструкции классических сигналов является применение теоремы Найквиста — Шеннона для определения минимальной частоты дискретизации. Если сигнал $x(t)$ не содержит частотных составляющих выше отсекаемой частоты (B), то сигнал может быть восстановлен при частоте дискретизации $f_S = 2B$ и затем интерполирован между отсчетами с помощью нормализованные функции sinc. Для серии отсчетов *x[n]* (где *n* — целое, а *x[n]* — отсчет во время $t_n = n\Delta t = n/2B$) интерполированная функция будет иметь вид

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \sin c(\frac{t-t_n}{\Delta t}). \tag{1}$$

Полученный сигнал представляет собой точную копию *x(t)*, при условии, что *x(t)* заключена в частотной полосе [0, *B*]. Для сигналов, которые не содержат значимых низкочастотных составляющих, можно уменьшить частоту дискретизации при помощи двух низкочастотных серий измерений и затем применить более сложную формулу для восстановления первоначального сигнала, использующую чередование серий измерений. Если сигнал находится между нижней частотой f_L и верхней частотой, такой, что $f_U = f_L + B$, где B — ширина спектра сигнала, то для частот дискретизации для метода дискретизации с чередованием должно выполняться только требование $f_S = B$. То есть полная частота дискретизации будет $2B$, а не $f_S = 2(f_L + B)$, как было бы в случае применения классического метода реконструкции сигнала. При $f_L \gg B$ разница в числе измерений достаточно значительна. Процессы дискретизации проходят с интервалом $\Delta t = 1/B$ и разделены временным промежутком θ. Для частного случая $f_L = 0$ и $\theta = \Delta t/2 = 1/2B$, используется формула (1). Для других значений θ формула примет вид

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_0[n]S(t-t_n) + x_\theta[n]S(-t+t_{n,\theta})], \tag{2}$$

где $x_0[n]$ и $x_\theta[n]$ — серии измерений на $t_n = n\Delta t$ и $t_{n,\theta} = (n\Delta t + \theta)$ соответственно, а интерполяционная функция $S(t)$ представлена формулой $S(t) = S_0(t) + S_1(t)$, причем

$$S_0(t) = \frac{\cos[2\pi(rB - f_L)t - r\pi B\theta] - \cos[2\pi f_L t - r\pi B\theta]}{2\pi Bt \sin(r\pi B\theta)},$$

$$S_1(t) = \frac{\cos[2\pi(f_L + B)t - (r+1)\pi B\theta] - \cos[2\pi(rB - f_L)t - (r+1)\pi B\theta]}{2\pi Bt \sin[(r+1)\pi B\theta]}.$$

Положим далее, что кубит подвергнут серии мгновенных нежестких измерений, имеющих целью детектировать его состояние. Такие нежесткие измерения могут быть описаны в рамках подхода, который называется операторной мерой вероятности (Probability Operator Measure — POM). Каждый элемент $\hat{\pi}_i$ соответствует исходу измерения и представляет собой вероятность этого исхода, который может быть получен при измерении. В рассматриваемом случае $i = 1, 2$, POM-элементы выберем в виде $\hat{\pi}_1 = p|2\rangle\langle 2| + (1-p)|1\rangle\langle 1|$, $\hat{\pi}_2 = p|1\rangle\langle 1| + (1-p)|2\rangle\langle 2|$ в соответствии с измерениями, детектирующими кубит в состоянии 1 или 2 соответственно. Здесь $0 < p < 1/2$ — вероятность ошибочного детектирования состояния кубита. Если $p = 0$, то измерение считается идеальным, $p = 1/2$ не дает никакой информации о системе.

Состояние кубита представим матрицей плотности ρ. Ее эволюция может быть найдена решением соответствующего уравнения. Для того чтобы записать управляющее уравнение, следуя [5], введем эффективные операторы. Они не определяются однозначно элементами POM, но для простоты выберем их в виде $\hat{A}_1=\sqrt{p}\left|2\right\rangle\left\langle 2\right|+\sqrt{(1-p)}\left|1\right\rangle\left\langle 1\right|=A_1^+$, $\hat{A}_2=\sqrt{p}\left|1\right\rangle\left\langle 1\right|+\sqrt{(1-p)}\left|2\right\rangle\left\langle 2\right|=A_2^+$. Полагая $\hat{\Gamma}_1=\hat{A}_1\sqrt{R}$, $\hat{\Gamma}_2=\hat{A}_2\sqrt{R}$, где R — частота, с которой проводятся измерения, и подставляя их в уравнение Линдблада $\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}=-\frac{i}{\hbar}[\hat{H},\hat{\rho}]-\frac{1}{2}\sum_i(\hat{\Gamma}_i^+\hat{\Gamma}_i\hat{\rho}+\hat{\rho}\hat{\Gamma}_i^+\hat{\Gamma}_i-2\hat{\Gamma}_i\hat{\rho}\hat{\Gamma}_i^+)$, приводим его к виду $\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t}=-\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{\rho}\right]+R\left(\hat{A}_1\hat{\rho}\hat{A}_1^++\hat{A}_2\hat{\rho}\hat{A}_2^+-\rho\right)=-\frac{i\Omega}{2}\left[\hat{\sigma}_1,\hat{\rho}\right]+k(\hat{\sigma}_3\hat{\rho}\hat{\sigma}_3-\hat{\rho})$.

Здесь $k=\frac{R}{2}(\sqrt{(1-\rho)}-\sqrt{\rho})^2$ — эффективная частота, характеризующая частоту наблюдений и точность измерений. Уравнение описывает измерение наблюдаемой величины $\hat{\sigma}_3$, которая имеет смысл разности заселенностей уровней. Заметим, что типичное время декогеренции $\tau=1/k$. Шум окружения здесь считается некореллированым (Марковским), а связь с окружением — слабой. Управляющее уравнение можно переписать в представлении векторов Блоха: $r_i=Tr[\sigma_i,\rho]]$, $i\in\{x,y,z\}$, где σ_i — матрица Паули, а матрица плотности дана в виде $\rho=0,5(I+r_x\sigma_x+r_y\sigma_y+r_z\sigma_z)$. .

С гамильтонианом $H=\omega\sigma_x/2$ (где $\omega=2\pi f$) и $\hat{y}=\sigma_z$ уравнение Линдблада дает три связанных уравнения:

$$\dot{r}_x=-2kr_x,\ \dot{r}_y=-\omega r_z-2kr_y,\ \dot{r}_z=\omega r_y, \tag{3}$$

которые могут быть решены аналитически. Для начальных условий $r_z=1$ и $r_x=0$ получим

$$r_x(t)=0; \tag{4}$$

$$r_y(t)=-\frac{\omega}{\mu}e^{-2kt}\sin(\mu t); \tag{5}$$

$$r_z(t)=e^{-2kt}[\cos(t\mu)+2k\sin(t\mu)/\mu], \tag{6}$$

Тогда

$$\rho=\begin{pmatrix}\frac{\mu+e^{-2kt}(\mu\cos(\mu t)+2k\sin(\mu t))}{2\mu} & \frac{i\omega e^{-2kt}\sin(\mu t)}{2\mu}\\ \frac{-i\omega e^{-2kt}\sin(\mu t)}{2\mu} & \frac{\mu-e^{-2kt}(\mu\cos(\mu t)+2k\sin(\mu t))}{2\mu}\end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $\mu=\sqrt{\omega^2-4k^2}$. Ограничиваясь z компонентой спина для простоты, вероятность получения результата +1 в момент времени t есть $P_+(t)=(r_z+1)/2$ и $P_-(t)=1-P_+(t)$ для результата измерения –1. Мы можем использовать аналитические выражения для нахождения вероятностей каждого измерения как функций времени и сгенерировать серии из N измерений для представления серии экспериментов. Генерируя серии из N результатов измерений для каждого отсчета, мы можем усреднить результаты, чтобы найти и оценить уровень сигнала в определенные моменты времени и использовать эти значения в формуле реконструкции сигнала (2) так, как если бы это был классический зашумленный сигнал. Гамильтониан и измерение были выбраны в качестве примера, так как они представляют собой единую систему: зарядовый кубит, взаимодействующий с окружением посредством туннелирования и измерения заряда.

В работе [8] предложен новый способ оценки времени измерения состояний кубита, основанный на методе эффективного гамильтониана [9], который характеризует объединенную систему, состоящую из кубита и вспомогательной системы. Для матрицы плотности $\mathbf{R}$ объединенной системы имеет место уравнение вида

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\mathbf{R}}}{\partial t}=\hat{\mathbf{H}}_{eff}\hat{\mathbf{R}}-\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{H}}^{+}_{eff}, \tag{8}$$

где

$$\hat{\mathbf{H}}_{eff}=\frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & -\dfrac{4ik}{\omega} & 0 & -1\\ -1 & 0 & -\dfrac{4ik}{\omega} & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Матрица плотности $\mathbf{R}$ и гамильтониан $\mathbf{H}_{eff}$ заданы в базисе векторов четырехмерного пространства состояний объединенной системы

$$|\mathrm{I}\rangle\equiv|1\rangle\otimes|1'\rangle\equiv|11'\rangle,|\mathrm{II}\rangle\equiv|1\rangle\otimes|2'\rangle\equiv|12'\rangle,|\mathrm{III}\rangle\equiv|2\rangle\otimes|1'\rangle\equiv|21'\rangle,|\mathrm{IV}\rangle\equiv|2\rangle\otimes|2'\rangle\equiv|22'\rangle.$$

Приведем диагональные элементы матрицы $\mathbf{R}$, являющейся решением уравнения (8):

$$R_{\mathrm{I,I}}=\frac{1}{4\mu^2}(\mu+\frac{\mu}{2}e^{-2kt}(e^{i\mu t}+e^{-i\mu t})-ike^{-2kt}(e^{i\mu t}-e^{-i\mu t}))^2,$$

$$R_{\mathrm{II,II}}=-\frac{\omega^2e^{-4kt}}{4\mu^2}(-1+\frac{1}{2}(e^{i\mu t}+e^{-i\mu t})^2),$$

$$R_{\mathrm{III,III}}=-\frac{\omega^2e^{-4kt}}{4\mu^2}(-1+\frac{1}{2}(e^{i\mu t}+e^{-i\mu t})^2),$$

$$R_{\mathrm{IV,IV}}=\frac{1}{4\mu^2}(-\mu+\frac{\mu}{2}e^{-2kt}(e^{i\mu t}+e^{-i\mu t})-ike^{-2kt}(e^{i\mu t}-e^{-i\mu t}))^2.$$

Из выражений для $R_{\mathrm{II,II}}$ и $R_{\mathrm{III,III}}$ видно, что время, которое определяет время распада состояний $|II\rangle$, $|III\rangle$, можно отождествить со временем измерения. Таким образом, при реконструкции состояний кубита по формуле (2) схема измерения его состояний будет эффективной, если выполняется следующие условие: $\Delta t,\theta>\dfrac{1}{4k}$.

В квантовой теории измерений важная роль отводится операциям и эффектам. Более того, в рамках этой теории вместо операторов измеряемых величин $\hat{\mathbf{M}}_r$ достаточно использовать только операции и эффекты. Согласно работе [10], операция O_r для результата r — положительно определенный супероператор. Операция O_r может быть записана для некоторого набора операторов $\{\hat{\Omega}_{r,j} : j\}$ в виде $O_r = \sum_j J[\hat{\Omega}_{r,j}]$, где $J[\hat{\mathbf{A}}]\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{A}}^+$; $\hat{\mathbf{A}}$ и $\hat{\mathbf{B}}$ — произвольные операторы.

Для данной операции O набор $\{\hat{\mathbf{\Omega}}_{r,j} : j\}$ может быть не единственным, поэтому операторы $\hat{\mathbf{\Omega}}_{r,j}$ нельзя трактовать как операторы наблюдаемых. Операция является базовым элементом в этой теории, который переводит систему из априорного состояния в апостериорное $\rho(t+T) = O_r\rho(t)$.

Для эффективных измерений можно определить оператор вероятности (*probability operator*) или «эффект» $\hat{\mathbf{E}}_r$ такой, что для всех ρ $\mathrm{Tr}[O_r\rho] = \mathrm{Tr}[\rho\hat{\mathbf{E}}_r]$.

Легко видеть, что $\hat{\mathbf{E}}_r = \sum_j \hat{\mathbf{\Omega}}^+_{r,j}\hat{\mathbf{\Omega}}_{r,j}$, то есть эффект положительно определен и эрмитов. Условие полноты: $\sum_r \hat{\mathbf{E}}_r = \hat{1}$.

В квантовой теории измерений известно несколько классов измерений [10]. В нашей работе рассмотрим четкие (*sharp measurements*) и нечеткие измерения (*unsharp measurements*).

В случае четких измерений эффекты $\hat{\mathbf{E}}_r$ — положительноопределенные одноранговые операторы $\hat{\mathbf{E}}_r = |\phi_r\rangle\langle\phi_r|$.

Тогда операция O_r для этого класса измерений будет иметь вид $O_r = \sum_k J[|\theta_{rk}\rangle\langle\phi_r|]$.

Отсюда видно, что четкие измерения — подкласс полных измерений. Также видно, что для эффективного измерения четкость и полнота — идентичные свойства.

Сущность четкости измерения заключается в том, что четкое измерение не может являться нечеткой версией другого измерения. То есть результат четкого измерения не может быть получен посредством проведения другого класса измерений и последующей классической обработки их результатов. Математически четкое измерение $\{\hat{\mathbf{E}}_r\}$ — такое, для которого не существует таких измерений $\{\hat{\mathbf{E}}'_s : s\}$, что $\hat{\mathbf{E}}_r = \sum_s w_{r|s}\hat{\mathbf{E}}'_s$, где $w_{r|s}$ — вероятность того, что r есть результат измерения, тогда как при втором измерении получен результат s. Также для четких измерений всегда возможно привести систему в состоянии, в котором данный результат измерения r не может быть получен. Однако отметим, что требования ортогональности эффектов нет, так что не всегда возможно приготовить систему в таком состоянии, для которого результат r гарантирован.

Покажем далее, что оператор эволюции объединенной системы приводит к эффекту со структурой, которая соответствует нечетким измерениям. С этой целью рассмотрим с более общих позиций эволюцию объединенной системы, состоящей из кубита и вспомогательной системы. В частности, матрицу $\boldsymbol{R}$ этой объединенной системы для любого момента времени $t \geqslant 0$ выразим через оператор эволюции $\mathbf{U}(t, 0)$: $\hat{\mathbf{R}}(t) = \hat{\mathbf{U}}(t, 0)\hat{\mathbf{R}}(0)\hat{\mathbf{U}}^{+}(t, 0)$.

Отметим, что оператор $\mathbf{U}$ не унитарен и в базисе из векторов $|\phi_k\rangle$ имеет диагональный вид:

$$\hat{\mathbf{U}}(t,0) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_1 t} e^{-\varepsilon_1 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_2 t} e^{-\varepsilon_2 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_3 t} e^{-\varepsilon_3 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_4 t} e^{-\varepsilon_4 t} \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы $|\phi_k\rangle$ удобно представить в виде линейной комбинации $|\phi_k\rangle = C_{\mathrm{I}}^k |\mathrm{I}\rangle + C_{\mathrm{II}}^k |\mathrm{II}\rangle + C_{\mathrm{III}}^k |\mathrm{III}\rangle + C_{\mathrm{IV}}^k |\mathrm{IV}\rangle$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Явные выражения для коэффициентов C_k^i приведены в работе [9].

Эволюции, описываемой оператором $\mathbf{U}$, соответствует эффект, определяемый соотношением $\hat{\mathbf{E}} \equiv \hat{\mathbf{U}}^{+}\hat{\mathbf{U}}$.

В базисе $|\phi_k\rangle$ этот эффект можно записать в виде

$$\hat{\mathbf{E}} = \sum w_k(t)\hat{\mathbf{E}}_k. \qquad (9)$$

$$w_k(t) \equiv e^{-\frac{2\beta_k}{\hbar}t}, \quad \varepsilon_k \equiv \alpha_k - i\beta_k,$$

$$\hat{\mathbf{E}}_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}}_2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}}_3 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}}_4 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

Легко увидеть, что $\hat{\mathbf{E}}_k$ — оператор проектирования на состояние $|\phi_k\rangle$ и имеет место условие полноты

$$\sum_k \hat{\mathbf{E}}_k = \hat{1}, \; k = 1, 2, 3, 4.$$

Таким образом, из формулы (9) следует, что эффект E имеет структуру, соответствующую нечетким измерениям. Выбор эффективной схемы измерений состояний кубита с целью последующей реконструкции его состояний имеет важное значение. В работе выполнена редукция уравнений эволюции измеряемого кубита к уравнениям объединенной системы, описывающим эволюцию в пространстве большей размерности. Построен оператор эволюции этой объединенной системы, состоящей из измеряемого кубита и вспомогательной системы. Такой подход позволил оценить время измерения, что, в свою очередь, привело к ограничениям на выбор параметров в формуле для реконструкции состояний измеряемого кубита. Эти ограничения приведены впервые. Показано, что оператор эволюции объединенной системы приводит к оператору вероятности (или эффекту) со структурой, которая соответствует классу нечетких измерений.

Список литературы

1. *Nakamura Y., Pashkin Yu. A., Tsai J. S.* Coherent control of macroscopic quantum states in a single-cooper-pair box // Nature. 1999. 398. P. 786—788.

2. *Pashkin Yu. A., Yamamoto T., Astafiev O. et al.* Quantum oscillations in two coupled charge qubits // Nature. 2003. 421. P. 823—826.

3. *Duty T., Gunnarsson D., Bladh K., Delsing P.* Coherent dynamics of a josephson charge qubit // Phys. Rev. B. 2004. 69. P. 140503.

4. *Efficient* scheme for the characterization of single qubit dynamics. URL: http://arxiv. org/abs/1003.4138.

5. *Cresser J. D., Barnett S. M., Jeffers J., Pegg D. T.* Measurement master equation. URL: http://arxiv. org/abs/quant-ph/0602153.

6. *Makhlin Y., Schön G., and Shnirman A.* // Phys. Rev. Lett. 2000. 85. 4578.

7. *Oxtoby N. P., Wiseman N. P., He-Bi Sun.* Sensitivity and back-action in charge qubit measurements by a strongly coupled single-electron transistor. URL: http://arxiv.org/abs/cond-mat/0601035.

8. *Иванов А. И., Иванов А. А.* Оценка ошибок детектирования состояний кубита // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Калининград, 2011. Вып. 5. С. 17—22.

9. *Иванов А. И., Иванов А. А.* Применение метода эффективного гамильтониана в динамике открытых квантовых систем // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Калининград, 2009. Вып. 4. С. 25.

10. *Wiseman H. M., Milburn G. J.* Quantum Measurement and Control. Cambridge, 2010.

Об авторах

Алексей Иванович Иванов — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: AIvanov@ kantiana.ru.

Александр Алексеевич Иванов — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: AIvanov@ kantiana.ru.

Authors

Dr Aleksey Ivanov — professor, I. Kant Baltic Federal University, e-mail: AIvanov@kantiana.ru.

Alexandr Ivanov — PhD student, I. Kant Baltic Federal University, e-mail: AIvanov@ kantiana.ru.