ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

Т.Н.Балазюк

# О НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С ОСНАЩЕННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В $n$-мерном проективном пространстве $P_n$ рассматривается распределение первого рода $m$-мерных плоскостей , в текущем элементе которого задан $(m-1)$-мерный конус второго порядка с вершиной в центре элемента (распределение $\Lambda(g)$. Установлено, что с распределением $\Lambda(g)$ в первой дифференциальной окрестности ассоциируется гиперполосное распределение $\mathcal{H}(\Lambda(g))$, внутренне определенное исходным многообразием, для которого распределение $\Lambda(g)$ является базисным. Построены охваты геометрических объектов, поля которых определяют различные дифференциально- геометрические структуры [3] , на распределении $\Lambda(g)$.

Исследования проводятся инвариантным теоретико-групповым методом Г.Ф.Лаптева [I].

На протяжении изложения индексы принимают следующие значения:

$\bar{J},\bar{K},\bar{L},...=0,1,...,n$; $J,K,L,...=1,2,...,n$; $a,b,c,...=1,2,...,n-1$;
$i,j,k,...=1,2,...,m$; $\alpha,\beta,\gamma,...=m+1,...,n$; $u,v,...=m+1,...,n-1$.

I. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ $\Lambda(g)$. Рассмотрим $n$-мерное проективное пространство $P_n$, отнесенное к подвижному реперу $R=\{M_{\bar J}\}$, дифференциальные уравнения движения которого имеют вид:

$$dM_{\bar J}=\omega_{\bar J}^{\bar K}M_{\bar K}. \qquad (I.1)$$

Формы Пфаффа удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega_{\bar J}^{\bar K}=\omega_{\bar J}^{\bar L}\wedge\omega_{\bar L}^{\bar K} \qquad (I.2)$$



и линейному соотношению

$$\omega_{\bar J}^{\bar J}=0. \qquad (I.3)$$

Совмещая вершину $M_0$ репера $R$ с текущей точкой пространства $P_n$, мы приведем структурные формы точки к каноническому виду $\omega_0^J$. Такой репер будем обозначать $R^0$.

Зададим в $P_n$ $m$-мерную плоскость $\Lambda(m+n-1)$, определив ее точкой $M_0$ и $m$ независимыми аналитическими точками $T_i=M_i+\Lambda_i^\alpha M_\alpha$. Условия стационарности плоскости $\Lambda$ при фиксации точки $M_0$ имеют вид:

$$\delta\Lambda_i^\alpha-\Lambda_j^\alpha\bar\theta_i^j+\Lambda_i^\beta\bar\omega_\beta^\alpha+\bar\omega_i^\alpha=0, \qquad (I.4)$$

где

$$\bar\theta_i^j=\bar\omega_i^j+\Lambda_i^\alpha\bar\omega_\alpha^j,\quad D\bar\theta_i^j=\bar\theta_i^l\wedge\bar\theta_l^j. \qquad (I.5)$$

З а м е ч а н и е. Можно ввести формы $\theta_i^j$, которые при $\omega_0^J$ превращаются в формы $\bar\theta_i^j$ и удовлетворяют структурным уравнениям $D\theta_i^j=\theta_i^l\wedge\theta_l^j+\omega_0^K\wedge\theta_{iK}^j$.

Согласно [4], распределением $(\Lambda)$ $m$-мерных центрированных плоскостей $\Lambda$ в $P_n$ называется многообразие, определяемое относительно репера $R^0$ следующей системой дифференциальных уравнений:

$$d\Lambda_i^\alpha-\Lambda_j^\alpha\theta_i^j+\Lambda_i^\beta\omega_\beta^\alpha+\omega_i^\alpha=\Lambda_{iK}^\alpha\omega_0^K. \qquad (I.6)$$

Пусть в текущей $\Lambda$-плоскости распределения $(\Lambda)$ задан $(m-1)$- мерный конус $g$ второго порядка с вершиной в точке $M_0$, который определяется невырожденным симметрическим тензором $g_{ij}$ и задается в репере $R^0$ системой конечных уравнений:

$$g_{ij}x^ix^j=0,\quad x^\alpha-\Lambda_i^\alpha x^i=0. \qquad (I.7)$$

Распределение таких плоскостей будем называть распределением $\Lambda$-плоскостей, оснащенным полем конусов $(g)$ или распределением $\Lambda(g)$.

Система дифференциальных уравнений, определяющая распределение $\Lambda(g)$, отнесенное к реперу $R^0$, имеет вид:

$$d\Lambda_i^\alpha-\Lambda_j^\alpha\theta_i^j+\Lambda_i^\beta\omega_\beta^\alpha+\omega_i^\alpha=\Lambda_{iK}^\alpha\omega_0^K, \qquad (I.8)$$
$$dg_{ij}-g_{lj}\theta_i^l-g_{il}\theta_j^l+2g_{ij}\omega_0^0=g_{ijK}\omega_0^K.$$

Система величин $\{\Lambda_i^\alpha,\Lambda_{iK}^\alpha,g_{ij},g_{ijK}\}$ образует фундаментальный объект первого порядка распределения $\Lambda(g)$ относительно репера $R^0$ [1].

Величины

$$W^\alpha_{ij} \stackrel{def}{=} \Lambda^\alpha_{ij} + \Lambda^\alpha_{i\beta}\Lambda^\beta_j, \qquad (I.9)$$

удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$dW^\alpha_{ij} - W^\alpha_{\ell j}\theta^\ell_i - W^\alpha_{i\ell}\theta^\ell_j + W^\beta_{ij}\theta^\alpha_\beta + W^\alpha_{ij}\omega^0_0 = W^\alpha_{ij\kappa}\omega^\kappa_0, \qquad (I.10)$$

(I.11)

образуют тензор, присоединенный к группе с инвариантными формами $\bar\theta^j_i, \bar\theta^\alpha_\beta, \omega^0_0$. В случае, когда $n$ и $m$ удовлетворяют соотношению $n-m \le \frac{m(m+1)}{2}$ из компонент объекта $\mathcal{W}^\alpha_{ij} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}(W^\alpha_{ij}+W^\alpha_{ji})$ по формулам, приведенным в работе Н.М.Остиану [5], можно построить относительный инвариант $\mathcal{J}=\mathcal{J}(\mathcal{W}^\alpha_{ij})$, удовлетворяющий дифференциальным уравнениям:

$$d\ln\mathcal{J} - 2(n-m)\theta^i_i + m\theta^\alpha_\alpha + m(n-m)\omega^0_0 = \mathcal{J}_\kappa\omega^\kappa_0. \qquad (I.12)$$

Обозначим

$$\mathcal{W}^{ij}_\alpha \stackrel{def}{=} \frac{\partial \ln\mathcal{J}}{\partial W^\alpha_{ij}}. \qquad (I.13)$$

Используя лемму Г.Ф.Лаптева [2], убеждаемся, что

$$d\mathcal{W}^{ij}_\alpha - \mathcal{W}^{ij}_\beta\theta^\beta_\alpha + \mathcal{W}^{\ell j}_\alpha\theta^i_\ell + \mathcal{W}^{i\ell}_\alpha\theta^j_\ell - \mathcal{W}^{ij}_\alpha\omega^0_0 = \mathcal{W}^{ij}_{\alpha\kappa}\omega^\kappa_0. \qquad (I.14)$$

2. ГИПЕРПОЛОСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, АССОЦИИРОВАННОЕ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ $\Lambda(g)$. Система дифференциальных уравнений распределения центрированных гиперплоскостей $H$ пространства $P_n$, определенных точками $M_0$, $P_a = M_a + x^n_a M_n$, в репере $R^0$ имеет вид:

$$dx^n_a - x^n_b\theta^b_a + x^n_a\omega^n_n + \omega^n_a = x^n_{a\kappa}\omega^\kappa_0, \quad \theta^b_a \stackrel{def}{=} \omega^b_a + x^n_a\omega^b_n. \qquad (2.1)$$

Требование инцидентности плоскости $\Lambda$ гиперплоскости $H$ с общим центром имеет вид: $x^n_i = \Lambda^n_i - \Lambda^u_i x^n_u$.
Пару распределений (1.8) и (2.1) с таким отношением инцидентности будем называть гиперполосным распределением $\mathcal{H}(\Lambda(g))$ [6]. При этом распределение $\Lambda(g)$ является базисным распределением, а распределение гиперплоскостей $H$ -оснащающим.

Гиперполосное распределение $\mathcal{H}(\Lambda(g))$ в репере $R^0$ определяется системой дифференциальных уравнений (1.8), к которой присоединяется система уравнений

$$dx^n_u - x^n_v\theta^v_u + x^n_u\omega^n_n - x^n_i\theta^i_u + \omega^n_u = x^n_{u\kappa}\omega^\kappa_0. \qquad (2.2)$$



Система величин $\{\Lambda^\alpha_i, x^n_u, g_{ij}, \Lambda^\alpha_{i\kappa}, x^n_{u\kappa}, g_{ij\kappa}\}$ образует фундаментальный объект первого порядка гиперполосного распределения $\mathcal{H}(\Lambda(g))$, отнесенного к реперу $R^0$.

Исключая случай аполярности объектов $g_{ij}$ и $\mathcal{W}^{ij}_\alpha$, введем величины

$$g_\alpha \stackrel{def}{=} \mathcal{W}^{ij}_\alpha g_{ij}, \qquad (2.3)$$

удовлетворяющие в репере $R^0$ следующим дифференциальным уравнениям:

$$dg_\alpha - g_\beta\theta^\beta_\alpha + g_\alpha\omega^0_0 = g_{\alpha\kappa}\omega^\kappa_0. \qquad (2.4)$$

Из системы (2.4) следует, что величины

$$H^n_u \stackrel{def}{=} -\frac{g_u}{g_n} \qquad (2.5)$$

удовлетворяют уравнениям вида (2.2), где $H^n_i = \Lambda^n_i - \Lambda^u_i x^n_u$.
Следовательно, доказана теорема:

С распределением $\Lambda(g)$ в первой дифференциальной окрестности инвариантно ассоциируется гиперполосное распределение $\mathcal{H}(\Lambda(g))$, для которого распределение $\Lambda(g)$ является базисным.

3. ИНВАРИАНТНЫЕ ОБРАЗЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Точка $F = y^0M_0 + y^iT_i + y^uT_u$ $(y^n=0)$ текущего элемента $H$ распределения $\mathcal{H}(\Lambda(g))$, отнесенного к реперу $R_T(H)=\{M_0, T_i, M_u, M_n\}$, включающему и точек $M_0, T_i, M_u$ гиперплоскости $H$, является фокальной, а направление смещения центра $M_0$, определяемое формами $\omega^J_0$, -соответствующим фокальным направлениям, если выполнены условия:

$$(y^0\delta^n_\kappa + y^i\Lambda^n_{i\kappa} + y^u H^n_{u\kappa})\omega^\kappa_0 = 0, \quad y^n = 0. \qquad (3.1)$$

Рассматривая смещения центра $M_0$ по кривым, принадлежащим распределению $\Lambda(g)$ и определяемым дифференциальными уравнениями

$$\omega^n_0 = 0, \quad \omega^u_0 = \Lambda^u_i\omega^i_0, \quad \omega^i_0 = \mu^i\theta, \quad (\mathcal{D}\theta = \theta\wedge\theta_1), \qquad (3.2)$$

условия (3.1) приведем к виду:

$$[y^i(\Lambda^n_{ij} + \Lambda^n_{iu}\Lambda^u_j) + y^u(H^n_{uj} + H^n_{uv}\Lambda^v_j)]\mu^j = 0, \quad y^n = 0. \qquad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что характеристика $\mathcal{K}$ гиперплоскости $H$ при смещениях по кривым, принадлежащим $\Lambda(g)$, определяется системой конечных уравнений:

$$W^n_{ij} y^i + W^n_{uj} y^u = 0, \quad y^n = 0, \quad W^n_{uj} \stackrel{\mathrm{def}}{=} H^n_{uj} + H^n_{uv} \Lambda^v_j . \tag{3.4}$$

Так как в репере $R_T(H)$

$$dW^n_{ij} - W^n_{lj}\theta^l_i - W^n_{il}\theta^l_j + W^n_{ij}(\theta^n_n + \omega^0_0) = W^n_{ijK}\,\omega^K_0 , \tag{3.5}$$

то $W^n_{ij}$ -тензор, а $W \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det\|W^n_{ij}\|$ · относительный инвариант.

О п р е д е л е н и е. Гиперполосное распределение $\mathcal{H}(\Lambda(g))$ называется регулярным [6], если тензор $\{W^n_{ij}\}$ невырожденный.

Т е о р е м а. Распределение $\mathcal{H}(\Lambda(g))$ является регулярным тогда и только тогда, когда пересечение плоскостей $\Lambda$ и $\mathcal{K}$ совпадает с точкой $M_0$ .

Ограничиваясь рассмотрением регулярного распределения $\mathcal{H}(\Lambda(g))$, мы можем плоскость $\mathcal{K}$ интерпретировать как нормаль первого рода плоскости $\Lambda$ внутри гиперплоскости $H$ .

Построен охват объекта $\{k_u\}$, определяющего в плоскости $(n-m-2)$-мерную плоскость $k$ , не проходящую через центр $M_0$, которая является аналогом плоскости Кенигса, и в репере $R_T(H_0)$ определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{gathered} y^0 - k_u y^u = 0, \\ y^i - \mathcal{K}^i_u y^u = 0, \quad y^n = 0, \end{gathered} \tag{3,6.}$$

где

$$k \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{m}[\tilde{\mathcal{K}}^i_{ui} - W^v_{li}\mathcal{K}^i_v\mathcal{K}^l_u - (H^n_{ui} + W^n_{li}\mathcal{K}^l_u)\hat{\nu}^i_n],$$
$$\tilde{\mathcal{K}}^i_{ui} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{K}^i_{ui} \pm \mathcal{K}^i_{uv}\Lambda^v_i ; \quad \hat{\nu}^i_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\delta^i_j + \Lambda^v_j\mathcal{K}^i_v)\nu^j_n - \mathcal{K}^i_v\nu^v_n ; \quad \mathcal{K}^i_u \stackrel{\mathrm{def}}{=} -W^n_{uj}W^{ij}_n , \tag{3.7}$$

а $\{\nu^a_n\}$-геометрический объект, определяющий одномерную нормаль первого рода гиперплоскости $H$ .

Таким образом, с распределением $\mathcal{H}(\Lambda(g))$ инвариантным образом связано распределение $(n-m-2)$-мерных плоскостей $k$ , определяемых уравнениями (3.8). Найден охват объекта $\{b_i\}$, удовлетворяющего дифференциальным уравнениям

$$db_i - b_j\theta^j_i + b_i\omega^0_0 + \theta^0_i = b_{iK}\omega^K_0, \quad \theta^0_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \omega^0_i + \Lambda^\alpha_i\omega^0_\alpha . \tag{3.8}$$

Формулы охвата имеют вид:

$$b_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1}[\Lambda^u_{iu} + W^u_{ij}\mathcal{K}^j_u - (\Lambda^n_{iu} + W^n_{ij}\mathcal{K}^j_u)(\nu^u_n - \nu^l_n\Lambda^u_l)] \tag{3.9}$$

Показано, что объект $\{b_i\}$ определяет $(m-1)$-мерную плоскость $b$ , инцидентную плоскости $\Lambda$ и не проходящую через центр $M_0$ . Оказывается, что плоскость $b$ соответствует в обоб-



щенном проективитете Бомпьяни-Пантази плоскости $\mathcal{K}$ .

Построены охваты геометрических объектов, определяющих нормаль второго рода плоскости $H$ , а также прямую $\chi$ плоскости $H$ , проходящую через центр, - аналог канонической касательной.

Таким образом, с распределением $\Lambda(g)$ ассоциируется структура гиперполосного распределения $\mathcal{H}(\Lambda(g))$, оснащающие гиперплоскостные элементы которого несут структуру почти произведения.

Найдены необходимые и достаточные условия того, что распределение $\Lambda(g)$ несет $T$ -структуру по Леграну [7].

Список литературы

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. - "Тр. Моск. матем. о-ва", 1953, №2, с. 275-282.

2. Л а п т е в Г.Ф. Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности. - Докл. АН СССР", 1959, 126, № 3, с. 490-493.

3. Л а п т е в Г.Ф. О с т и а н у Н.М. - структуры на дифференцируемых многообразиях. Проблемы геометрии. М., Всесоюзн. ин-т научн. и технич. информ. АН СССР, 1975, 7, с. 5-21.

4. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве. - "Тр. геометрич. семинара Всесоюзн. ин-т научн. и технич. информ. АН СССР", 1973, №4, с. 71-120.

5. О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства" - "Тр. геометрич. семинара Всесоюз. ин-т научн. и технич. информ. АН СССР", 1966, № 1, 1966, с. 239-264.

6. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперплосного распределения -мерных линейных элементов. - "Проблемы геометрии. Всесоюзн. ин-т научн. и технич. информ. АН СССР", 1975, № 7, с. 117-152.

7. Ш и р о к о в А.П. Структуры на дифференцируемых многообразиях. - "Алгебра. Топология. Геометрия. 1976. М., 1969, с. 125-186. (Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР).