Библиографический список

1.Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии.М.:Наука,1986.224с.

2.Картан Э. Пространства проективной связности//Тр.семинара по векторному и тензорному анализу.М.;Л.,1937.Вып.4. С.160-173.

3.Евтушик Л.Е.,Лумисте Ю.Г.,Остиану Н.М.,Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях//Проблемы геометрии/ ВИНИТИ.М.,1979.Т.9. 247с.

4.Лаптев Г.Ф. Гиперповерхность в пространстве проективной связности// Докл.АН СССР.1958.Т.121.№1.С.41-44.

5.Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей//Геометрия.1963.Итоги науки/ ВИНИТИ. М.,1965.

6.Лаптев Г.Ф.,Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I//Тр.геометр.семинара / ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.49-93.

7.Рыбников А.К. Аффинные связности,индуцируемые на многомерных поверхностях аффинного пространства // Тр.геометр. семинара/ ВИНИТИ.М.,1974.Т.6.С.135-154.

8.Лумисте Ю.Г. Связности в однородных расслоениях// Матем.сб.М.,1966.Т.69.С.434-469.

9.Лумисте Ю.Г. Связности на многообразиях//Математическая энциклопедия.М.,1984.С.1092-1094.

10.Чакмазян А.В. Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n // Проблемы геометрии/ ВИНИТИ.М.,1978.Т.10.С.55-74.

11.Норден А.П. Пространства аффинной связности.М.: Наука,1976.432с.

12.Шевченко Ю.И. Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1987.Вып.18.С.115-120.

13. Cartan E. Leçons sur la théorie des espaces a connexion projective. Paris : Gauthier-Villars, 1937. 308 p.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.19 1988

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ $\mathfrak{A}$

С.В. Шмелева
(Калининградское ВИУИВ)

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуется класс конгруэнций невырожденных линейчатых квадрик Q -конгруэнции $\mathfrak{A}$, -обладающих следующими свойствами: 1) на квадрике $Q \in \mathfrak{A}$ существуют по крайней мере две различные фокальные точки A_0 и A_3, описывающие неплоские поверхности и не лежащие на одной прямолинейной образующей; 2) точки A_1 и A_2 пересечения прямолинейных образующих квадрики Q, проходящих через A_0 и A_3, являются фокальными; 3) линии, огибаемые на поверхностях (A_0) и (A_3) прямыми A_0A_i и A_3A_i, являются асимптотическими и соответствуют друг другу. Доказано, что фокальные поверхности (A_0) и (A_3) конгруэнции $\mathfrak{A}$ имеют кратность три и являются линейчатыми квадриками, а фокальные поверхности (A_1) и (A_2) вырождаются в линии.

Учитывая условия 1),2),3) в системе (1) работы [1], находим, что система уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathfrak{A}$ в репере $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ имеет вид:

$$\left\{\begin{aligned} &\omega_0^3=0,\ \ \omega_3^0=0,\ \ \omega_i^{\hat{i}}=0,\ \ \omega_i^3=(1+c_{12})\,\omega^{\hat{i}},\\ &dc_{12}+(1+c_{12})\Omega=0,\ \ \omega_3^i=b_i^i\,\omega^i,\ \ \omega_i^0-\omega_3^{\hat{i}}=\lambda_{i\hat{i}}\,\omega^{\hat{i}},\\ &\Omega=h_k\,\omega^k,\ \ \omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

причем

$$b_1^1\lambda_{12}-b_2^2\lambda_{21}=0,\ \ \lambda_{12}-\lambda_{21}+c_{12}(b_1^1-b_2^2)=0, \tag{2}$$

$$\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i,\ \ b_1^1b_2^2(1+c_{12})(b_1^1+\lambda_{21})(b_2^2+\lambda_{12})\neq 0. \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем $i,\hat{i},k=1,2$; $i\neq\hat{i}$ и по индексам i и $\hat{i}$ суммирование не производится.

Т е о р е м а 1. Существуют два попарно непересекающихся класса конгруэнций $\mathfrak{A}$: конгруэнции $\mathfrak{A}_1$, характеризуемые соотношениями:

$$b_1^1=b_2^2\overset{def}{=}b_0,\quad \lambda_{12}=\lambda_{21}\overset{def}{=}\tilde{\lambda}, \qquad (4_{\mathrm{I}})$$

и конгруэнции $\mathfrak{A}_2$, для которых

$$b_1^1-b_2^2\neq 0,\quad \lambda_{i\hat{i}}=c_{12}b_{\hat{i}}^{\hat{i}}. \qquad (4_2)$$

Каждый из этих подклассов определяется с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая неравенство (3), приводим соотношения (2) к виду:

$$\lambda_{i\hat{i}}=t\,b_{\hat{i}}^{\hat{i}},\quad (t-c_{12})(b_1^1-b_2^2)=0. \qquad (5)$$

Эти соотношения разбиваются на два взаимно исключающих друг друга случая (4_{I}) и (4_2).

Учитывая в системе (I) соотношения (4_{I}), приводим систему уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathfrak{A}_1$ к виду:

$$\begin{cases} \omega_0^3=0,\quad \omega_3^0=0,\quad \omega_i^{\hat{i}}=0,\quad \omega_i^3=(1+c_{12})\,\omega^{\hat{i}},\\ dc_{12}+(1+c_{12})\Omega=0,\quad \omega_3^i=b_0\omega^i,\quad \omega_i^0-\omega_3^{\hat{i}}=\tilde{\lambda}\,\omega^{\hat{i}},\\ d\ln b_0=\omega_3^3-\omega_0^0,\quad \Omega=h_k\omega^k,\quad \omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0,\\ d\tilde{\lambda}+\tilde{\lambda}(2\omega_0^0-\omega_1^1-\omega_2^2)\,b_0\,\Omega=0. \end{cases} \qquad (6)$$

Из (I) и (4_2) следует, что конгруэнции $\mathfrak{A}_2$ определяются системой уравнений Пфаффа:

$$\begin{cases} \omega_0^3=0,\quad \omega_3^0=0,\quad \omega_i^{\hat{i}}=0,\quad \omega_i^3=(1+c_{12})\,\omega^{\hat{i}},\\ \omega_3^i=b_i^i\,\omega^i,\quad \omega_i^0=(1+c_{12})\,\omega_3^{\hat{i}},\ \Omega=h_k\omega^k,\\ \omega_0^0+\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0. \end{cases} \qquad (7)$$

Анализируя системы (6) и (7), убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 2. Фокальные поверхности (A_0) и (A_3), ассоциированные с конгруэнцией $\mathfrak{A}_1$, имеют кратность три и являются линейчатыми квадриками; фокальные поверхности (A_1) и (A_2) вырождаются в линии. Прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) вырождается в связку прямых.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (I) следует, что соотношения (7) и (I2) работы [2], характеризующие трехкратность фокальной поверхности (A_0), и аналогичные им условия трехкратности фокальной поверхности (A_3) удовлетворяются.

Так как

$$d[A_0A_i]=(\omega_0^0+\omega_i^i)[A_0A_i]+\omega^{\hat{i}}\big([A_{\hat{i}}A_i]+(1+c_{12})[A_0A_3]\big), \qquad (8)$$

$$d[A_3A_i]=(\omega_3^3+\omega_i^i)[A_3A_i]+\omega^{\hat{i}}\big([A_{\hat{i}}A_i]+(b_{\hat{i}}^{\hat{i}}+\lambda_{i\hat{i}})[A_3A_0]\big), \qquad (9)$$

то поверхности (A_0) и (A_3) являются линейчатыми квадриками с прямолинейными образующими A_0A_i и A_3A_i. Имеем:

$$dA_i=\omega_i^iA_i+\omega^{\hat{i}}\big((\lambda_{i\hat{i}}+b_i^{\hat{i}})A_0+(1+c_{12})A_3\big), \qquad (10)$$

$$d(A_3-b_0A_0)=\omega_3^3\,(A_3-b_0A_0). \qquad (11)$$

Следовательно фокальные поверхности (A_i) вырождаются в линии, а конгруэнция (A_0A_3) есть связка прямых. Теорема доказана.

Квадрики (A_0) и (A_3), ассоциированные с конгруэнцией $\mathfrak{A}_1$, определяются уравнениями:

$$(\tilde{\lambda}-b_0c_{12})(x^3)^2+2(1+c_{12})\big((1+c_{12})x^1x^2-x^0x^3\big)=0, \qquad (12)$$

$$(b_0c_{12}-\tilde{\lambda})(x^0)^2+2(b_0+\tilde{\lambda})\big((b_0+\tilde{\lambda})x^1x^2-x^0x^3\big)=0. \qquad (13)$$

Квадрики (A_0) и (A_3), ассоциированные с конгруэнцией $\mathfrak{A}_2$, определяются одним и тем же уравнением:

$$(1+c_{12})\,x^1x^2-x^0x^3=0. \qquad (14)$$

Обозначим эту общую квадрику через Q_0. Линия пересечения квадрик Q_0 и $Q\in\mathfrak{A}_2$ распадается на четыре прямые - ребра A_0A_i, A_3A_i репера.

Библиографический список

I. Ш м е л е в а С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с вырождающейся поверхностью, порожденной фокальными точками второго порядка//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1985. Вып.16. С.113-116.

2. М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1981. Вып.12. С.44-47.

9 Зак. 806