формы ω_1^2 и ω^3 – линейно зависимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (I2) следует, что точка A является пятикратной фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2) тогда и только тогда, когда $\Gamma_1^{21}\Gamma^{32} - \Gamma_1^{22}\Gamma^{31} = 0$, т.е. когда формы ω_1^2 и ω^3 линейно зависимы.

Т е о р е м а 5. Точка L тогда и только тогда является строенной фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2), когда формы ω_1^2 и $(\omega^3+2\Omega_1)$–линейно зависимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 3 следует, что L является строенной фокальной точкой коники F_2 тогда и только тогда, когда прямая ℓ касается коники F_2 в точке L, т.е. когда

$$\Gamma_1^{22}(\Gamma^{31}+2) - \Gamma^{32}\Gamma_1^{21} = 0. \qquad (I4)$$

Условие (I4) и означает линейную зависимость форм ω_1^2 и $(\omega^3+2\Omega_1)$.

С л е д с т в и е. Если точка L является характеристической точкой плоскости $A\bar e_1\bar e_2$ конгруэнции $(A\bar e_1\bar e_2)$, то точка L является строенной фокальной точкой коники F_2 конгруэнции (F_2).

Доказательство аналогично доказательству следствия из теоремы I.

Т е о р е м а 6. Точки N_1, N_2 пересечения коники F_2 с диаметром $E_1\bar e_3$ тогда и только тогда являются фокальными точками коники F_2 конгруэнции (F_2), когда формы ω_1^2 и $(\omega^3+\Omega_1)$ –линейно зависимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнения (I2) следует, что точки $N_1(I,0,I)$ и $N_2(I,0,-I)$ тогда и только тогда являются фокальными точками коники F_2 конгруэнции (F_2), когда $\Gamma_1^{22}(\Gamma^{31}+1)-\Gamma^{32}\Gamma_1^{21}=0$, а это и есть условие линейной зависимости форм ω_1^2 и $(\omega^3+\Omega_1)$.

С л е д с т в и е. Если точка E_1 является характеристической точкой плоскости $A\bar e_1\bar e_2$ конгруэнции $(A\bar e_1\bar e_2)$, то N_1 и N_2 –фокальные точки коники F_2 конгруэнции (F_2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть точка E_1 –характеристическая точка плоскости $A\bar e_1\bar e_2$, тогда $\Gamma^{31}=-1$, $\Gamma^{32}=0$. Учитывая эти соотношения в уравнении (I2), получим

$$x^1x^3(x^1\Gamma_1^{22}-\Gamma_1^{22})=0. \qquad (I5)$$

Подставляя координаты точек N_1 и N_2 в (I5), убеждаемся в справедливости утверждения.

Т е о р е м а 7. Прямая ℓ тогда и только тогда проходит через характеристическую точку $K(-\Gamma^{31}; -\Gamma^{32}; 0)$ плоскости $A\bar e_1\bar e_2$ конгруэнции $(A\bar e_1\bar e_2)$, когда либо точка K лежит на прямой $A\bar e_1$, либо на индикатрисе вектора $\bar e_1$ касательная вдоль линии $\Omega_2=0$ параллельна вектору $\bar e_3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из уравнений (I3) следует, что прямая ℓ проходит через точку K тогда и только тогда, когда $\Gamma^{32}\Gamma_1^{21}=0$. Условие $\Gamma^{32}=0$ означает, что характеристическая точка K плоскости $A\bar e_1\bar e_2$ конгруэнции $(A\bar e_1\bar e_2)$ лежит на прямой $A\bar e_1$. Условие $\Gamma_1^{21}=0$ означает, что $(d\bar e_1)_{\Omega_2=0}$ параллелен вектору $\bar e_3$, т.к.

$$d\bar e_1 = (\Gamma_1^{21}\bar e_1 + \bar e_3)\Omega_1 + \Gamma_1^{22}\bar e_2\Omega_2.$$

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ КВАДРИК С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЦЕНТРОВ

Е.П.Ю р о в а

(Калининградский государственный университет)

В трехмерном аффинном пространстве исследуется специальный класс конгруэнций L центральных квадрик с вырождающейся в линию поверхностью центров.

Отнесем конгруэнцию L к реперу $R=\{A,\bar e_\alpha\}(\alpha,\beta=\overline{1,2,3})$, начало A которого совмещено с центром квадрики Q, вектор $\bar e_1$ направлен по касательной к линии (A), конец E_3 вектора $\bar e_3$ расположен в фокальной точке квадрики Q, вектор $\bar e_2$ сопряжен векторам $\bar e_1$ и $\bar e_3$ относительно Q, причем концы E_i векторов $\bar e_i$ $(i,j,k=\overline{1,2})$ расположены на квадрике Q. Уравнение квадрики Q и система уравнений Пфаффа конгруэнции L в выбранном репере принимают соответственно вид

$$F \equiv (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \qquad (I)$$

$$\begin{cases} \omega^2=0, \quad \omega^3=0, \quad \omega_3^3=0, \quad \omega^1=\alpha\,\omega_1, \quad \omega_1^2=\beta\,\omega_1, \\ \omega_2^1+\omega_1^2=\lambda^k\omega_k, \quad \omega_i^k = e_i^k\omega_k, \quad \omega_3^i+\omega_i = b^i\omega_i + b\,\omega_j, \end{cases} \qquad (2)$$

где $\alpha\neq 0$, т.к. из рассмотрения исключается случай вырождения в точку поверхности центров (A) и главные формы $\omega_i=\omega_i^3$ приняты за независимые формы конгруэнции L.

Анализируя систему уравнений (2), убеждаемся, что конгруэнции L существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов. Обозначим через E_α^* точки, аффинно-симметричные точкам E_α. Из системы (2) следует

Т е о р е м а I. Конгруэнции L обладают следующими свойствами: I) торсы прямолинейной конгруэнции (AE_2) соответствуют координатным линиям $\omega_i=0$; 2) ассоциированные квадрики Q' конгруэнции L проходят через центр квадрики Q [1];3)точка E_3^* является фокальной точкой квадрики Q ;4) если точка E_2 является фокальной точкой квадрики Q ,то и точка E_2^* также фокальная точка Q^i ;5)точки E_1 и E_1^* не могут являться одновременно фокальными точками квадрики Q .

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Уравнение торсов прямолинейной конгруэнции (AE_2) имеет вид: $\alpha\omega_1\omega_2=0$ $(\alpha\neq 0)$. 2) Действительно,уравнения ассоциированных квадрик Q^i принимают следующий вид:

$$F^i \equiv c_1^i (x^1)^2 + c_2^i (x^2)^2 + \lambda x^1 x^2 + b^i x^i x^3 + b x^j x^3 + \alpha \delta_i^1 x^i = 0 . \qquad (3)$$

Доказательство свойств 3),4) и 5) следует из системы уравнений,определяющей фокальные точки квадрики Q :

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 - 1 = 0, \quad F^1 = 0, \quad F^2 = 0 . \qquad (4)$$

Из конгруэнции L выделим класс конгруэнций L_1 .

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией L_1 назовем конгруэнцию L ,у которой точки E_i являются фокальными.

В силу этого определения конгруэнции L_1 выделяются из конгруэнций L соотношениями:

$$c_2^1 = 0, \quad c_1^1 = -\alpha, \quad c_1^2 = 0, \quad c_2^2 = 0, \quad b = 0, \quad \beta = 0, \quad b^2 = 1 . \qquad (5)$$

С учетом (5) система уравнений Пфаффа конгруэнции L_1 имеет вид:

$$\begin{cases} \omega^2 = 0, \quad \omega^3 = 0, \quad \omega_3^3 = 0, \quad \omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = 0, \quad \omega_3^2 = 0, \\ \omega^1 = \alpha\omega_1, \quad \omega_2^1 = \lambda^k\omega_k, \quad \omega_1^1 + \omega^1 = 0, \quad \omega_3^1 = (b^1 - 1)\,\omega_1 . \end{cases} \qquad (6)$$

Произвол существования конгруэнций L_1 -одна функция двух аргументов.Для конгруэнций L_1 справедлива

Т е о р е м а 2.Конгруэнции L_1 обладают следующими свойствами:1)поверхность (E_1) вырождается в линию с касательной,параллельной вектору $\bar e_3$;2)поверхность (E_3) вырождается в линию с касательной,параллельной вектору $\bar e_1$;3) векторы $\bar e_i$, $\bar e_3$ сопряжены относительно ассоциированных квадрик Q^j; 4)индикатриса вектора $\bar e_3$ вырождается в линию,касательная к которой коллинеарна вектору $\bar e_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о свойств 1) и 2) непосредственно следует из системы уравнений (6): $d\bar E_1 = \omega_1 \bar e_3$, $d\bar E_3 = (\alpha + b^1 - 1)\bar e_1 \omega_1$ 3) Учитывая соотношения (5) в (3),придем к указанному утверждению. 4)Действительно, $d\bar e_3 = (b^1 - 1)\,\bar e_1 \omega_1$.

Библиографический список

1.Лаптев Г.Ф.Распределение касательных элементов//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.29-48.

УДК 514.75

К ВОПРОСУ О ФОКАЛЬНЫХ ОБРАЗАХ МНОГООБРАЗИЙ КОНИК В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.Н.Х у д е н к о

(Калининградский государственный университет)

В четырехмерном проективном пространстве рассматриваются псевдоконгруэнции коник.Выделен класс псевдоконгруэнций,каждая коника которого обладает шестью фокальными точками.Указаны аналогии с конгруэнциями коник в трехмерном проективном пространстве.

Отнесем четырехмерное проективное пространство P_4 к проективному реперу $R=\{A_J\}$ $(J,K,L=\overline{1,5})$. Деривационные формулы репера R и уравнения структуры проективного пространства имеют обычный вид:

$$dA_J = \omega_J^K A_K , \qquad D\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K .$$

Рассмотрим в этом пространстве псевдоконгруэнцию (двупараметрическое семейство) коник C . Поместим вершины A_α репера R в двумерной плоскости коники C ,а вершины A_a -вне этой плоскости. Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения:

$$\alpha,\beta,\gamma = 1,2,3 ; \quad a,b = 4,5; \quad i,j,k = 1,2 .$$

Тогда система уравнений,определяющая конику C ,запишется в виде

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^a = 0 . \qquad (1)$$

Из требований относительной инвариантности коники C получаем, что структурными [1] формами многообразия коник в P_4 будут являться [2] формы ω_α^a, $\theta_{\alpha\beta}$ $(\theta_{\alpha\beta}=\theta_{\beta\alpha})$,где

$$\theta_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\,\omega_\beta^\gamma - a_{\beta\gamma}\,\omega_\alpha^\gamma + \frac{2}{3}\,a_{\alpha\beta}\,\omega_\gamma^\gamma . \qquad (2)$$

Зададим псевдоконгруэнцию коник C с помощью уравнений Пфаффа

$$\theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta i}\,\tau^i , \qquad \omega_\alpha^a = \Lambda_{\alpha i}^a\,\tau^i , \qquad (3)$$

где τ^i - параметрические формы,удовлетворяющие структурным уравнениям бесконечной аналитической группы [3]

$$D\tau^i = \tau^j \wedge \tau_j^i ,$$
$$D\tau_j^i = \tau_j^k \wedge \tau_k^i + \tau^k \wedge \tau_{jk}^i ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$