УДК 514.76

М. Б. Банару[1]
[1] *Смоленский государственный университет, Россия*
mihail.banaru@yahoo.com

О некоторых почти контактных метрических гиперповерхностях W_4-многообразий

Доказано, что 3-гиперповерхности W_4-многообразий допускают почти контактную метрическую структуру, идентичную той, которая может быть реализована на 2-гиперповерхностях таких многообразий.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, типовое число, гиперповерхность, W_4-многообразие.

1. Класс W_4 относится к так называемым малым классам Грея — Хервеллы почти эрмитовых многообразий. Его часто называют классом локально конформных келеровых многообразий, что не совсем точно: на самом деле класс W_4 содержит локально конформные келеровы (locally conformal Kählerian, LCK-) многообразия, а совпадает с классом LCK-многообразий лишь для размерности не ниже шести [1]. W_4-многообразия изучали такие известные математики, как И. Вайсман (Израиль), А. Грей (США) и В. Ф. Кириченко (Россия).

Известно [2], что на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура. В работе [3] было доказано, что если почти эрмитово многообразие принадлежит классу W_4, а типовое число гиперповерхности равно единице, то почти контактная метрическая структура на такой гиперповерхности будет идентична той, что индуцируется на вполне геодези-

---

Поступила в редакцию 25.04.2018 г.

ческой гиперповерхности. Результаты такого же плана получены для 0- и 1-гиперповерхностей специальных эрмитовых [4], приближенно келеровых [5] и келеровых многообразий [6].

В данной статье будет показано, что 3-гиперповерхности W_4-многообразий допускают почти контактную метрическую структуру, идентичную структуре, которая может быть реализована на 2-гиперповерхностях таких многообразий.

2. Напомним [1], что под почти эрмитовой (almost Hermitian, AH-) структурой на четномерном многообразии M^{2n} мы понимаем пару $\{J, g = \langle \cdot,\cdot \rangle\}$, состоящую из почти комплексной структуры J и римановой метрики $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$, причем J и $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$ должны быть согласованы таким условием:

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Для всякой AH-структуры $\{J, g = \langle \cdot,\cdot \rangle\}$ на многообразии M^{2n} определяется так называемая фундаментальная форма:

$$F(X, Y) = \langle X, JY \rangle, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}).$$

Пусть $\left(M^{2n}, \{J, g = \langle \cdot,\cdot \rangle\}\right)$ — почти эрмитово многообразие. Зафиксируем точку $p \in M^{2n}$. Пусть $T_p(M^{2n})$ — пространство, касательное к многообразию M^{2n} в точке p; $\{J_p, g_p = \langle \cdot,\cdot \rangle\}$ — почти эрмитова структура, порожденная парой $\{J, g = \langle \cdot,\cdot \rangle\}$. Реперы, адаптированные почти эрмитовой структуре (или A-реперы), устроены следующим образом:

$$(p, \quad \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}}),$$

где ε_a — собственные векторы оператора почти комплексной структуры в комплексификации касательного пространства, отвечающие собственному значению оператора $i = \sqrt{-1}$, а $\varepsilon_{\hat{a}}$ — собственные векторы, отвечающие собственному значению $-i$. Здесь индекс a принимает значения от 1 до n; $\hat{a} = a + n$.

Почти эрмитова структура принадлежит классу W_4, если

$$\nabla_X(F)(Y,Z) = -\frac{1}{2(n-1)}\{\langle X,Y\rangle\delta F(Z) - \langle X,Z\rangle\delta F(Y) -$$

$$-\langle X,JY\rangle\delta F(JZ) + \langle X,JZ\rangle\delta F(JY)\}, \quad X,Y,Z \in \aleph(M^{2n}),$$

где δ — оператор кодифференцирования, а ∇ — риманова связность метрики $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ [1].

Как мы уже упоминали выше, на всякой ориентируемой гиперповерхности N почти эрмитова многообразия индуцируется почти контактная метрическая структура, под которой понимают систему тензорных полей $\{\Phi,\ \xi,\ \eta,\ g\}$, для нее выполняются следующие условия:

$$\eta(\xi) = 1;\ \Phi(\xi) = 0;\ \eta\circ\Phi = 0;\ \Phi^2 = -id + \xi\otimes\eta;$$

$$\langle\Phi X,\Phi Y\rangle = \langle X,Y\rangle - \eta(X)\eta(Y),\ X,Y \in \aleph(N).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$, ξ — векторное поле, η — ковекторное поле, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика, $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на гиперповерхности N.

3. Воспользуемся записанными в А-репере структурными уравнениями Картана почти контактной метрической структуры на ориентируемой гиперповерхности N^{2n-1} в W_4-многообразии M^{2n} [3; 7]:

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta + B^{\alpha\beta}_\gamma\omega^\gamma\wedge\omega_\beta + \left(\sqrt{2}B^{\alpha n}_\beta + i\sigma^\alpha_\beta\right)\omega^\beta\wedge\omega +$$

$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}_n + i\sigma^{\alpha\beta}\right)\omega_\beta\wedge\omega; \tag{1}$$

$$d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha\wedge\omega_\beta + B^\gamma_{\alpha\beta}\omega_\gamma\wedge\omega^\beta + \left(\sqrt{2}B^\beta_{\alpha n} - i\sigma^\beta_\alpha\right)\omega_\beta\wedge\omega +$$

$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^n_{\alpha\beta} - i\sigma_{\alpha\beta}\right)\omega^\beta\wedge\omega;$$

$$d\omega=\left(\sqrt{2}B^{n\alpha}_{\beta}-\sqrt{2}B^{\alpha}_{n\beta}-2i\sigma^{\alpha}_{\beta}\right)\omega^{\beta}\wedge\omega_{\alpha}+\left(B^{n}_{n\beta}+i\sigma_{n\beta}\right)\omega\wedge\omega^{\beta}+$$

$$+\left(B^{n\beta}_{n}-i\sigma^{\beta}_{n}\right)\omega\wedge\omega_{\beta},$$

где $B^{ab}_{c}=-\frac{i}{2}J^{a}_{\hat{b},c}$, $B^{c}_{ab}=\frac{i}{2}J^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}$.

Здесь $\{\omega^{\alpha}\}$, $\{\omega_{\alpha}\}$ — компоненты форм смещения $(\omega^{n}=\omega)$, $\{\omega^{k}_{j}\}$ — компоненты форм римановой связности; через $\{J^{j}_{k,m}\}$ обозначены компоненты ∇J. Отметим, что системы функций $\left\{B^{ab}{}_{c}\right\}$ и $\left\{B_{ab}{}^{c}\right\}$ служат компонентами тензоров Кириченко почти эрмитовой структуры на многообразии M^{2n}. Здесь и далее $\alpha,\ \beta,\gamma=1\ ,\ldots,\ n-1$; $a,\ b\ ,c=1\ ,\ldots,\ n$; $\hat{a}=a+n$; σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в W_4-многообразие M^{2n}.

Рассмотрим случай [2], в котором матрица второй квадратичной формы гиперповерхности W_4-многообразия принимает следующий вид:

$$\left(\sigma_{ps}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c} (\sigma_{\alpha\beta}) & \begin{matrix}0\\ \ldots\\ 0\end{matrix} & 0 \\ \hline 0\ldots0 & \sigma_{nn} & 0\ldots0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}0\\ \ldots\\ 0\end{matrix} & (\sigma_{\overline{\alpha}\hat{\beta}}) \end{array}\right),\ p,\ s=1,2,3,\ldots,n-1\ ,$$

причем

$$rank\,(\sigma_{\alpha\beta})=rank\,(\sigma_{\hat{\alpha}\hat{\beta}})=1\,.$$

Тогда ранг матрицы (σ_{ps}) будет равен двум в том и только том случае, когда $\sigma_{nn}=0$; в противном случае $rank\,(\sigma_{ps})=3$. Обратим внимания на такой важный факт: в рассматриваемом А-репере структурные уравнения Картана почти контактной метрической структуры не содержат компоненту σ_{nn}, а следовательно, обращение в нуль этой компоненты никак не скажется на соответствующих структурных уравнениях. Для рассматриваемых нами гиперповерхностей, для которых $rank\,(\sigma_{ps})=2$ или $rank\,(\sigma_{ps})=3$, то есть гиперповерхностей с типовыми числами два или три, соответственно, структурные уравнения (1) примут одинаковый вид, а именно:

$$d\omega^\alpha=\omega^\alpha_\beta\wedge\omega^\beta+B^{\alpha\beta}{}_\gamma\omega^\gamma\wedge\omega_\beta+\sqrt{2}B^{\alpha n}{}_\beta\,\omega^\beta\wedge\omega+$$
$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B^{\alpha\beta}{}_n+i\sigma^{\alpha\beta}\right)\omega_\beta\wedge\omega;$$
$$d\omega_\alpha=-\omega^\beta_\alpha\wedge\omega_\beta+B_{\alpha\beta}{}^\gamma\omega_\gamma\wedge\omega^\beta+\sqrt{2}B_{\alpha n}{}^\beta\,\omega_\beta\wedge\omega+$$
$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}B_{\alpha\beta}{}^n-i\sigma_{\alpha\beta}\right)\omega^\beta\wedge\omega;$$
$$d\omega=\left(\sqrt{2}B^{n\alpha}{}_\beta-\sqrt{2}B_{n\beta}{}^\alpha\right)\omega^\beta\wedge\omega_\alpha+B_{n\beta}{}^n\,\omega\wedge\omega^\beta+B^{n\beta}{}_n\,\omega\wedge\omega_\beta.$$

Таким образом, мы пришли к следующему результату.

Теорема. *В W_4-многообразии почти контактные метрические структуры на гиперповерхности с типовым числом два и на гиперповерхности с типовым числом три могут оказаться идентичными.*

Учитывая тот факт, что класс W_4 почти эрмитовых многообразий содержит все LCK-многообразия, мы получаем такое

Следствие. *В LCK-многообразии почти контактные метрические структуры на гиперповерхности с типовым числом два и на гиперповерхности с типовым числом три могут оказаться идентичными.*

Список литературы

1. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.

2. *Кириченко В. Ф., Банару М. Б.* Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2014. Т. 127. С. 5—40.

3. *Банару М. Б.* О почти контактных метрических гиперповерхностях с малыми типовыми числами в W_4 -многообразиях // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 2018. №1. С. 67—70.

4. *Banaru M. B.* A note on geometry of special Hermitian manifolds // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39, №1. P. 20—24.

5. *Банару М. Б.* Почти контактные метрические гиперповерхности с типовым числом 1 или 0 в приближенно келеровых многообразиях // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 2014. №3. С. 60—62.

6. *Банару М. Б.* О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях келеровых многообразий // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, №4. С. 719—723.

7. *Банару М. Б.* W_4 -многообразия и аксиома косимплектических гиперповерхностей // Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 2015. №5. С. 34—37.

M. Banaru[1]
[1] *Smolensk State University*
4 Przhevalsky St., Smolensk, 214000, Russia
mihail.banaru@yahoo.com

On some almost contact metric hypersurfaces of W_4-manifolds

Submitted on April 25, 2018

It is proved that 3-hypersurfaces of W_4-manifolds admit an almost contact metric structures that can be identical to the structure induced on 2-hypersurfaces of such manifolds.

Keywords: almost contact metric structure, type number, hypersurface, W_4-manifold.

References

1. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa: Pechatnyi Dom, 2013 (in Russian).

2. *Banaru, M.B., Kirichenko, V.F.:* Almost contact metric structures on the hypersurface of almost Hermitian manifolds. J. Math. Sci., **207**:4 (2015), 513—537.

3. *Banaru, M.B.:* On almost contact metric hypersurfaces with small type numbers in W_4-manifolds. Moscow University Mathematics Bulletin, to appear (2018).

4. *Banaru, M.B.:* A note on geometry of special Hermitian manifolds // Lobachevskii Journal of Mathematics, **39**:1, 20—24 (2018).

5. *Banaru, M.B.:* Almost contact metric hypersurfaces with type number 0 or 1 in nearly-Kählerian manifolds. Moscow University Mathematics Bulletin, **69**:3, 132—134 (2014).

6. *Banaru, M.B.:* On almost contact metric 1-hypersurfaces in Kählerian manifolds // Siberian Mathematical Journal, **55**:4, 585—588 (2014).

7. *Banaru, M.B.:* The axiom of cosymplectic surfaces and W_4-manifolds // Moscow University Mathematics Bulletin, **70**:5, 213—215 (2015).