3) $\bar{\gamma}_{i_0 i_0} b^0_{i_0 k} b^0_{i_0 r} \bar{\gamma}^{kr} - (b^0_{i_0 i_0})^2 = 0$.

Т е о р е м а 3. Следующие утверждения равносильны:
I) Средние нормали описывают подповерхности нулевого внешнего параметра распределения вдоль линии ℓ ;
2) $\vec{e}_{i_0} \in \mathcal{N}$; 3) $b^0_{i_0 k} b^0_{i_0 r} \bar{\gamma}^{kr} = 1$.

Т е о р е м а 4. Следующие утверждения равносильны:
I) Средние нормали описывают торсы вдоль линии ℓ ;
2) $\vec{e}_{i_0}$ является нормальным вектором гиперплоскости $\Pi^{i_0} = [\vec{A}^1, \ldots, \vec{A}^{i_0-1}, \vec{A}^{i_0+1}, \ldots, \vec{A}^p]$ в пространстве $\mathcal{N}$;
3) Касательный вектор $\vec{e}_{i_0}$ к линии ℓ параллелен своему гиперсферическому изображению $\vec{a}_{i_0}$,т.е. $\vec{e}_{i_0} \parallel \vec{a}_{i_0}$; 4) $\bar{\gamma}_{i_0 i_0} - (b^0_{i_0 i_0})^2 = 0$.

3. Пусть средние нормали описывают торсы вдоль линии ℓ : $\omega^{i_0} \neq 0, \omega^j = 0 \ (j \neq i_0)$. Тогда $\vec{e}_{i_0} \parallel \vec{a}_{i_0}$,откуда и из (2) получим

$$\lambda = -\gamma^{i_0 k} b^0_{k i_0} \neq 0, \ \gamma^{jk} b^0_{k i_0} = 0 \ (j \neq i_0), \ \xi^{\hat{\alpha}}_{i_0} = 0, \ \vec{a}_{i_0} = \lambda \vec{e}_{i_0}. \qquad (3)$$

Рассмотрим проекцию вектора

$$d\vec{M} = m^0 \omega^i_0 \vec{e}_i + m^0 \xi^{\hat{\alpha}}_k \omega^k \vec{e}_{\hat{\alpha}} + \frac{1}{p} \gamma^{ij} b^0_{ijk} \omega^k \vec{e}_0,$$

где $m^0 = \frac{1}{p} \gamma^{ij} b^0_{ij} \neq 0 \quad \omega^i_0 = -\gamma^{ik} b^0_{kj} \omega^j$,на касательную плоскость $T_{p(x)}$ в направлении линии ℓ :

$$\vec{\Pi}_{T_p(x)} d\vec{M} = -m^0 \gamma^{ik} b^0_{kj} \omega^j \vec{e}_i = \mu \omega^{i_0} \vec{e}_{i_0},$$

где $\mu = m^0 \lambda \neq 0$. Значит [1], ℓ-линия кривизны относительно средней нормали.

Обратно, если линия ℓ кривизны относительно средней нормали принадлежит распределению $\widetilde{\Delta}_r$,то имеют место формулы (3). Из теоремы 4 заключаем, что средние нормали описывают торсы вдоль линии ℓ. Доказано следующее

С л е д с т в и е. Средние нормали описывают торсы вдоль линии ℓ на поверхности V_p тогда и только тогда, когда ℓ – линия кривизны относительно средней нормали и $\ell \subset \widetilde{\Delta}_r$.

Заметим, что средние нормали могут описывать торсы только в случае $p - s > 0$ [2].

Библиографический список

I. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве//Лит.матем.сб./АН Лит.ССР.Вильнюс,1966.Т.6.№4. С.15-31.

2. Л у м и с т е Ю.Г. Многомерные линейчатые поверхности евклидова пространства//Матем.сб.М.,1961.Т.55.Вып.4.С.411-420.

3. Г р и ц а н с А.С. О семействе средних нормалей поверхности $V_2 \subset E_5$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1986. Вып.17.С.21-25.

УДК 514.76

О РАССЛОЕНИИ $A_{n,m}$ $(n>m)$

Е.Т.И в л е в
(Томский политех. ин-т)

В статье изучаются некоторые поля инвариантных геометрических образов в аффинных слоях A_m расслоения $A_{n,m}$ $(n>m)$ с n-мерной базой M_n с заданным сечением и с заданной аффинной связностью C .Приводится пример аффинного расслоения $Q_{n,m}$ $(n>m)$ с аффинной связностью C ,который дает возможность изучить специальный вид геометрических образов, изученных в случае расслоения $A_{n,m}$ $(n>m)$.

Все построения в данной статье носят локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются аналитическими.

1. Рассматривается n-мерное гладкое многообразие M_n (класса C^∞ или C^ω) с базисными формами θ^i $(i,j,k,\ell = \overline{1,n})$,удовлетворяющими структурным уравнениям :

$$\mathcal{D}\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j, \ \mathcal{D}\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \theta^\ell \wedge \theta^i_{\ell j}, \quad \theta^i_{[\ell j]} = 0. \qquad (1)$$

Обозначим $L^1_n = (M_n, L_n)$ –присоединенное расслоенное пространство с базой M_n и n-мерными центроаффинными слоями L_n. Здесь слой отнесен к аффинному реперу $E = \{\bar{A}, \bar{e}_i\}$ с деривационными формулами и структурными уравнениями:

$$d\bar{e}_i = \bar{\theta}^j_i \bar{e}_j, \ \bar{\theta}^j_i = \theta^j_i \Big|_{\theta^\ell = 0}, \ \mathcal{D}\bar{\theta}^j_i = \bar{\theta}^k_i \wedge \bar{\theta}^j_k$$

и изоморфен касательному пространству $T_n(u)$ к M_n в точке (u), причем первые интегралы линейно независимых форм θ^i соответствуют главным параметрам $u^1, u^2, \ldots, u^n$ точки $(u) \in M_n$. Заметим, что L_n является представлением дифференциальной группы $\mathcal{D}^1_n$ первого порядка в смысле [1, с.162-165].

2.Рассмотрим расслоенное пространство $A_{n,m}=(M_n,A_m)$, у которого базой является многообразие M_n, а слоем, соответствующим каждой точке $(u)\in M_n$, служит m-мерное аффинное пространство A_m, причем в пространстве $A_{n,m}$ задано точечное сечение: каждой точке $(u)\in M_n$ в слое $A_m(u)$ отвечает вполне определенная точка $M(u)$. Предполагается, что слой $A_m(u)$ отнесен к аффинному реперу $T=\{\bar B(u), \bar\varepsilon_\alpha(u)\}$ $(\alpha,\beta,\gamma,\sigma=\overline{1,m})$, причем $M(u)=B(u)$. В расслоении $A_{n,m}$ задается аффинная связность C, которая определяет отображение соседнего слоя $A_m(u+du)$ точки $(u+du)\in M_n$ на исходный слой при помощи следующего отображения аффинных реперов:

$$\begin{cases}\bar B(u+du)\to\bar B(u,du)\doteq\bar B(u)+\omega^\alpha(u)\bar\varepsilon_\alpha(u),\\ \bar\varepsilon_\alpha(u+du)\to\bar\varepsilon_\alpha(u,du)\doteq\bar\varepsilon_\alpha(u)+\omega_\alpha^\beta(u)\bar\varepsilon_\beta(u),\end{cases}\qquad(2)$$

где I-формы ω^α и ω_α^β удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$\begin{cases}\mathcal{D}\omega^\alpha=\omega^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha+R^\alpha_{oij}\theta^i\wedge\theta^j,\quad R^\alpha_{o(ij)}=0,\\ \mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta+R^\beta_{\alpha ij}\theta^i\wedge\theta^j,\quad R^\beta_{\alpha(ij)}=0.\end{cases}\qquad(3)$$

Здесь компоненты тензора кручения R^α_{oij} и кривизны $R^\beta_{\alpha ij}$ связности C удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\nabla R^\alpha_{\mathcal{J}ij}=R^\alpha_{\mathcal{J}ijk}\theta^k,\quad R^\alpha_{\mathcal{J}(ij)k}=0\quad(\mathcal{J}=\overline{0,m}).\qquad(4)$$

Заметим, что дифференциальные уравнения секущей n-поверхности M^o_n, диффеоморфной M_n, в силу (I)-(4) можно записать в виде:

$$\omega^\alpha=A_i^\alpha\theta^i,\quad\nabla A_i^\alpha=A_{ij}^\alpha\theta^j,\quad\nabla A_{ij}^\alpha-A_\ell^\alpha\theta_{ij}^\ell=A_{ijk}^\alpha\theta^k,$$
$$A_{ij}^\alpha=\Lambda_{ij}^\alpha-R^\alpha_{oij},\quad\Lambda^\alpha_{[ij]}=0,\qquad(5)$$

которым удовлетворяют компоненты геометрического объекта $\Gamma=\{A_i^\alpha, A_{ij}^\alpha\}$ в смысле Г.Ф.Лаптева [2].

3. Из (5) и (2) в соответствии с [3, с.80] следует, что $(n-m)$-плоскость L^2 в слое $L_n(u)$ точки $(u)\in M_n$ расслоения L_n^1, определяемая в аффинных координатах репера E уравнениями:

$$L^2:\quad A^\alpha_{oi}t^i=0\quad(\alpha=\overline{1,m};\ i=\overline{1,n};\ n>m),\qquad(6)$$

представляет собой множество всех направлений $\bar t=(\bar A\bar e_i)t^i$ в L_n, соответствующих касательным к кривым $k(t)$: $\theta^i=t^i\theta$, $\nabla t^i-t^i\theta_1=t_1^i\theta$, $\mathcal{D}\theta=\theta\wedge\theta_1$ в точке $(u)\in M_n$ таким, что вдоль них точка B параллельно переносится в аффинной связности C. При этом предполагается, что $Rang\,[A^\alpha_{oi}]=m$, причем $n>m$ (этот случай и будет предметом нашего внимания).

Проведем в L_n с учетом (6) и (5) такую канонизацию аффинного репера E, при которой

$$\begin{cases}A^\alpha_{\hat\beta}=0,\quad A^\alpha_\beta=\delta^\alpha_\beta,\quad\omega^\alpha=\theta^\alpha,\quad\omega^\alpha_\gamma-\theta^\alpha_\gamma=A^\alpha_{\gamma j}\theta^j,\\ \qquad\theta^\alpha_{\hat\gamma}=-A^\alpha_{\hat\gamma j}\theta^j,\quad L^2=(\bar A\bar e_{m+1}\dots\bar e_n).\end{cases}\qquad(7)$$

В силу такой фиксации каждое направление $\bar t=(\bar A\bar e_i)t^i\in L_n$ при развертывании пространства $A_{n,m}\,(n>m)$ на слой $A_m(u)$ вдоль кривой $k(t)$ переходит в направление $t=(\bar B\bar\varepsilon_\alpha)t^\alpha\in A_m$. В дальнейшем направление $t\in A_m$ будем называть разверткой направления $\bar t\in L_n$ на слой $A_m(u)$.

4.Каждой точке $(u)\in M_n$ в слое $L_n(u)$ расслоения L_n^1 поставим в соответствие m-плоскость $L^1\ni A$ $(L^1\cap L^2=A,\ L^1\cup L^2=L_n)$:

$$L_1:\quad t^{\hat\alpha}=c^{\hat\alpha}_\beta t^\beta,\quad\nabla c^{\hat\alpha}_\beta+\theta^{\hat\alpha}_\beta=A^{\hat\alpha}_{\beta i}\theta^i\qquad(8)$$

В следующих пунктах будет изучаться случай, когда величины $c^{\hat\alpha}_\beta$ выражаются через компоненты геометрического объекта Γ и тензора кручения-кривизны связности C расслоения $A_{n,m}$ $(n>m)$.

5. Из (7) и (8) в [4] и (8) следует, что каждой точке

$$X(u)\in A_m(u):\quad\bar X(u)=\bar B(u)+x^\alpha(u)\bar\varepsilon_\alpha(u)$$

и направлению

$$\bar v(u)=v^i(u)\,(\bar A(u)\bar e_i(u))\in L_n(u),$$

отвечающим точке $(u)\in M_n$, сопоставляется центроаффинное преобразование слоя $A_m(u)$ в себя с центром в точке $B(u)$:

$$\begin{cases}\Pi(X,\bar v)=\{x^\gamma(R^\alpha_{\gamma\beta i}+R^\alpha_{\gamma\hat\beta i}c^{\hat\beta}_\beta)v^i\}\quad(x^o=1),\\ \Pi(X,\bar v)\Gamma_{m-1}=\{W\mid R(\bar v,\bar w)X\in\Gamma_{m-1}\}\ni B,\end{cases}\qquad(9)$$

где $\Gamma_{m-1}\ni B$ -гиперплоскость в слое $A_m(u)$; $W=(\bar B\bar\varepsilon_\alpha)W^\alpha\in A_m$ - развертка направления $\bar w=w^i(\bar A\bar e_i)\in L^1\subset L_n$ на слой $A_m(u)$; $R(\bar v,\bar w)$ -аффинное преобразование слоя $A_m(u)$ в смысле [4]. Из (9) следует, что каждой m-плоскости $L^1(u)$ и точке

$X(u) \in A_m(u)$ отвечает в $L_n(u)$ гиперплоскость:

$$E_{n-1}(X, L^1) = \{\bar{v} \mid \Pi(X,\bar{v}) \to W\}: x^{\jmath}(R^{\alpha}_{\jmath\alpha i} + R^{\alpha}_{\jmath\hat{\beta} i} C^{\hat{\beta}}_{\alpha}) v^i = 0 \quad (x^0=1). \quad (10)$$

Здесь $\Pi \to W$ означает, что преобразование (9) является преобразованием W в смысле [5] или преобразованием с нулевым следом.

Из (7) и (8) в [4] замечаем, что в слое $L_n(u)$ точки $(u) \in M_n$ существует линейный гиперкомплекс:

$$K_{n-1} = \{(\bar{v}, \bar{w}) \mid R(\bar{v}, \bar{w}) \to W\} \subset L_n: \ R^{\alpha}_{\alpha ij} v^i w^j = 0, \quad (11)$$

являющийся неопределенным в случае, когда связность C -эквиаффинная.

6. Линейное подпространство $L^1 \subset L_n$, отвечающее текущей точке $(u) \in M_n$, называется главным, если

$$E_{n-1}(X, L^1) \parallel L^2, \ \forall X \in A_m. \quad (12)$$

Из (10)-(12) следует, что подпространство $L^1 \subset L^n$ будет главным тогда и только тогда, когда

$$R^{\sigma}_{\alpha\hat{\beta}\sigma} + R^{\sigma}_{\alpha\hat{\beta}\hat{\sigma}} C^{\hat{\sigma}}_{\sigma} = 0. \quad (13)$$

Отсюда вытекает

Т е о р е м а 1. Текущей точке $(u) \in M_n$ расслоения $A_{n,m}$ $(n>m)$ в общем случае в $L_n(u)$ отвечает одна главная m-плоскость L^1.

7. Проведем с учетом (8) такую канонизацию аффинного репера в L_n, при которой

$$C^{\hat{\alpha}}_{\alpha} = 0, \ L^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_m), \ \theta^{\hat{\alpha}}_{\alpha} = A^{\hat{\alpha}}_{\alpha k}\theta^k, \ \nabla A^{\hat{\alpha}}_{\alpha k} = A^{\hat{\alpha}}_{\alpha kj}\theta^j \quad (14)$$

Из (7) и (15) следует, что подпространства L^p $(p = 1, 2)$ определяют на базе M_n распределения Δ^p, интегральные кривые которых на M_n, проходящие через точку (u), определяются дифференциальными уравнениями

$$\Delta^1: \ \theta^{\hat{\alpha}} = 0, \qquad \Delta^2: \ \theta^{\alpha} = 0, \quad (15)$$

вполне интегрируемыми тогда и только тогда, когда

$$\Delta^1: \ A^{\hat{\alpha}}_{[\alpha\beta]} = 0; \qquad \Delta^2: \ R^{\alpha}_{0\beta\gamma} = 0. \quad (16)$$

Обозначим C^p аффинные связности расслоения $A_{n,m}$, являющиеся ограничением аффинной связности C на распределения Δ^p.

Из (3) в силу (16) следует, что эти связности имеют следующие тензоры кручения-кривизны:

$$C^1: R^{\alpha}_{0\sigma\gamma}, \ R^{\beta}_{\alpha\sigma\gamma}; \quad C^2: \ R^{\alpha}_{0\hat{\sigma}\hat{\gamma}}, \ R^{\beta}_{\alpha\hat{\sigma}\hat{\gamma}}. \quad (17)$$

Из (14)-(17) вытекает

У т в е р ж д е н и е 1. Распределение Δ^2 инволютивно тогда и только тогда, когда точка $B(u)$ -ядро при аффинных преобразованиях $R(\bar{v}, \bar{w})$, $\forall \bar{v}, \bar{w} \subset L^2$.

8. Рассматривается m-мерное проективное пространство Q_m, отнесенное к подвижному проективному реперу $Q = \{A_{\jmath}\}$ $(\jmath, \mathcal{y}, \varkappa, \iota = \overline{0,m})$ с деривационными формулами и уравнениями

$$dA_{\jmath} = \Omega^{\varkappa}_{\jmath} A_{\varkappa}, \ \mathcal{D}\Omega^{\varkappa}_{\jmath} = \Omega^{\mathcal{y}}_{\jmath} \wedge \Omega^{\varkappa}_{\mathcal{y}}, \ \Omega^{\jmath}_{\jmath} = 0.$$

В расслоении $Q_{n,m} = M_n \times Q_m$ зададим сечение: каждой точке $(u) \in M_n$ в слое Q_m сопоставим точку A_0 и гиперплоскость $G_{m-1} = (A_1, \ldots, A_m)$. Тогда

$$\Omega^{\alpha}_0 = A^{\alpha}_{0i}\theta^i, \ \Omega^0_{\alpha} = A^0_{\alpha i}\theta^i, \ \nabla A^{\alpha}_{0i} + A^{\alpha}_{0i}\Omega^0_0 = A^{\alpha}_{0ij}\theta^j, \ \nabla A^0_{\alpha i} - A^0_{\alpha i}\Omega^0_0 = A^0_{\alpha ij}\theta^j. \quad (17)$$

Заметим, что в расслоении $Q_{n,m}$ с заданным сечением $(u) \to (A_0, G_{m-1})$ определена аффинная связность C с формами связности

$$\omega^{\alpha} = \Omega^{\alpha}, \ \ \omega^{\beta}_{\alpha} = \Omega^{\beta}_{\alpha} - \delta^{\beta}_{\alpha}\Omega^0_0,$$

удовлетворяющими структурным уравнениям (3), в которых

$$R^i_{0\alpha\beta} = 0, \ \ R^{\beta}_{\alpha ij} = A^0_{\alpha[i} A^{\beta}_{|0|j]} + \frac{1}{2}\delta^{\beta}_{\alpha} A^0_{\gamma[i} A^{\gamma}_{|0|j]}. \quad (18)$$

Из (13) - (18) вытекает

У т в е р ж д е н и е 2. Связность C^2 расслоения $Q_{n,m}$ $(n>m)$ является локально плоской. Связность C^1 расслоения $Q_{n,m}$ $(n>m)$ имеет нулевое кручение. Линейное подпространство $L^2 \subset L_n$ принадлежит линейному гиперкомплексу $K_{n-1} \subset L_n$. В общем случае главной плоскости $L^1(u) \subset L_n(u)$ точки $(u) \in M_n$ расслоения $Q_{n,m}$ не существует.

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. сем./ ВИНИТИ. М., 1966. Т. I. С. 139-189.

3 Зак. 812

2.Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий// Тр.моск.матем.о -ва,М.,1953.Т.2.С.275-382.

3.Е в т у ш и к Л.Е.,Лумисте Ю.Г.,Остиану Н.М.,Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1987.Т.9.С.7-270.

4.И в л е в Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях $P_{m,n}$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1984.Вып.15.С.32-37.

5.И в л е в Е.Т.,Исабеков М.Б. К проективной геометрической интерпретации некоторых образов,определяемых двухвалентными тензорами // Материалы 3 науч.конф.по матем.и мех./Томский ун-т.Томск,1973.Вып.I.С.50-52.

УДК 514.75

КОМПЛЕКСЫ W КУБИК В P_3

В.Б.К и м
(Кемеровский ун-т)

В работах [I] ,[2] рассмотрены комплексы (трехпараметрические семейства) V_3 и однопараметрические семейства V_1 плоских кривых третьего порядка (кубик) в пространстве P_3 соответственно.В данной работе изучаются комплексы кубик , характеризующиеся свойствами своих однопараметрических семейств.Все используемые величины и обозначения приведены в [I]и [2]. Индексы i,j,k,l принимают значения I,2,3.

I.Выведем предварительно некоторые соотношения.Используя введенные в [I] и [2] величины,можно показать,что объекты

$$B^{ijkl} = b^{ijkl} - (a^{l(ij}\nu^{k)} - a^{ijk}\nu^{l}) \qquad (I)$$

и

$$\beta^{ijk} = b^{ijk} - (a^{l(ij}\mu^{k)} - a^{ijk}\mu^{l})b_l \qquad (2)$$

являются тензорами для комплекса V_3 и однопараметрического семейства V_1 кубик соответственно.Здесь и далее по индексам, заключенным в скобки,производится циклирование.

Пусть V_1 -произвольное однопараметрическое семейство кубик,принадлежащее комплексу V_3 .Его можно задать уравнениями

$$\omega_i = b_i\theta \; ; \quad \nabla a_{ijk} = a_{ijk}\omega_0^0 + b_{ijk}\theta, \qquad (3)$$

где b_i удовлетворяют условию относительной инвариантности [3]. Вдоль этого семейства величины b^{ijkl}, b^{ijk}, b^{l} связаны соотношениями

$$b^{ijk} = b^{ijkl} b_l . \qquad (4)$$

Выражая b^{ijkl} и b^{ijk} из (I) и (2) и подставляя полученные выражения в (4),находим

$$\beta^{ijk} + (a^{l(ij}\mu^{k)} - a^{ijk}\mu^{l})b_l = B^{ijkl}b_l + (a^{l(ij}\nu^{k)} - a^{ijk}\nu^{l})b_l . \qquad (5)$$

Свернув (5) последовательно с b_k и b_l ,получим

$$B^{ijkl} b_j b_k b_l = a(\mu^i - \nu^i) - a^{lik} b_k b_l (b_j\mu^j - b_j\nu^j) . \qquad (6)$$

Наконец,свернув (6) с b_i ,получим

$$B^{ijkl} b_i b_j b_k b_l = a(\beta - 2b_i\nu^i). \qquad (7)$$

Обозначим через $P(V_1)$ оснащающую точку P семейства V_1 , а через $\pi(V_1)$ -плоскость,проходящую через $P(V_1)$ и характеристику l плоскости кубики вдоль семейства V_1 .

2.О п р е д е л е н и е I. Комплекс V_3 кубик,характеризующийся условием

$$B^{(ijkl)} = 0, \qquad (8)$$

называется комплексом W_0 .

Т е о р е м а I. Комплекс V_3 будет комплексом W_0 тогда и только тогда,когда его оснащающая точка M [I] инцидентна плоскости $\pi(V_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для любого однопараметрического семейства V_1 комплекса плоскость $\pi(V_1)$ и точка M инцидентны.Тогда из [I] и [2] вытекает:

$$\beta_i\nu^i = \frac{\beta}{2} . \qquad (9)$$

Из (9) и (7) следует

$$B^{ijkl} b_i b_j b_k b_l = 0 . \qquad (10)$$

Так как последнее условие должно выполняться для любых b_i ,то согласно [4] получаем