4. *Борисенко А.А.* О полных параболических поверхностях // Укр. геом. сб. 1985. Вып. 28. С. 8 – 19.

M. Cheshkova

ON GEOMETRY OF CUT HYPERSURFACES

The cut hypersurface in Euclidean space E^n examined.

УДК 514.76

Ю.И. Шевченко
(Калининградский государственный университет)

ТРИ РАССЛОЕНИЯ ПРОЕКТИВНОЙ ГРУППЫ

Рассмотрена группа преобразований GP(n) n-мерного проективного пространства P_n, выделяемая факторизацией из линейной группы GL(n+1). Проективная группа GP(n) содержит аффинную группу GA(n), коаффинную группу $GA^*(n)$ и линейную группу GL(n), являющиеся подгруппами стационарности гиперплоскости P_{n-1}, точки A и 0-пары (A,P_{n-1}), $A\notin P_{n-1}$. Показано, что проективная группа GP(n) представляется в виде трех главных расслоений, типовыми слоями которых являются подгруппы GA(n), $GA^*(n)$ и GL(n): 1) аффинных реперов над двойственным проективным пространством гиперплоскостей $P_n^* = Gr(n-1,n)$ – многообразием Грассмана гиперплоскостей; 2) коаффинных реперов над исходным проективным пространством $P_n = Gr(0,n)$ – многообразием Грассмана точек; 3) линейных реперов со связностью над 2n-мерным пространством 0-пар Π_{2n} – подмножеством неинцидентных пар (A,P_{n-1}) прямого произведения $P_n \times P_n^* = Gr(0,n)\times Gr(n-1,n)$.

1. Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A,A_I\}$ $(I,J,K,L = \overline{1,n})$. Деривационные формулы вершин репера имеют вид

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \tag{1}$$

причем базисные формы $\omega^I, \omega_J^I, \omega_I$ эффективно действующей в пространстве P_n проективной группы GP(n) удовлетворяют структурным уравнениям (см., например. [1, с. 173]):

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \tag{2}$$

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I, \tag{3}$$

$$D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J. \tag{4}$$

2. Пусть в проективном пространстве P_n фиксирована гиперплоскость P_{n-1}, тогда пространство P_n становится гиперцентропроективным пространством $P_n^{n-1} = \{P_n, P_{n-1}\}$, эквивалентным расширенному аффинному пространству $\tilde{A}_n$. Поместим вершины A_I репера $\{A, A_I\}$ в гиперплоскость P_{n-1}. Из формул (1_2) находим уравнения стационарности гиперплоскости P_{n-1}: $\omega_I = 0$, которые в силу структурных уравнений (4) образуют вполне интегрируемую систему и упрощают уравнения (2; 3)

$$D\pi^I = \pi^J \wedge \pi_J^I, \; D\pi_J^I = \pi_J^K \wedge \pi_K^I \quad (\pi = \omega|_{\omega_I=0}). \tag{5}$$

Получили структурные уравнения аффинной (гиперцентропроективной) группы $GA(n)$, действующей в пространствах P_n^{n-1} и $\tilde{A}_n$.

Замечание 1. Норден [2] назвал P_n^{n-1} рассеченным пространством. Если из пространства P_n^{n-1} удалить гиперплоскость P_{n-1}, то получим разрезанное [3, с. 65] гиперцентропроективное пространство $\overline{P}_n^{n-1}$, эквивалентное аффинному пространству A_n, в котором также действует аффинная группа $GA(n)$.

Из структурных уравнений (5_2) видно, что система уравнений $\pi_J^I = 0$ вполне интегрируема. Она выделяет в аффинной группе $GA(n)$ n-членную подгруппу T_n трансляций точек пространства P_n^{n-1} с внешними уравнениями

$$D\overline{\pi}^I = 0 \; (\overline{\pi}^I = \pi^I|_{\pi_J^I=0}).$$

Подгруппа T_n абелева и является нормальным делителем группы $GA(n)$, поэтому имеется линейная факторгруппа $GL(n) = GA(n)/T_n$ со структурными уравнениями (5_2).

Утверждение 1. *Аффинная группа $GA(n)$ содержит линейную подгруппу $GL(n)$, выделяемую вполне интегрируемой системой уравнений $\pi^I = 0$ и изоморфную факторгруппе $GL(n)$, действующей неэффективно в двух $(n-1)$-мерных проективных пространствах: P_{n-1} и*

P^*_{n-1}– *пространстве (n-2)-мерных плоскостей, принадлежащих гиперплоскости P_{n-1}, и многообразии Грассмана Gr(n-2,n-1).*

В пространстве P_n рассмотрим пространство P^*_n гиперплоскостей, т.е. многообразие Грассмана Gr(n-1,n). Пространство P^*_n = Gr(n-1,n) является n-мерным проективным пространством гиперплоскостей, двойственным исходному точечному пространству P_n. В уравнениях (3) вынесем базисные формы ω_K пространства P^*_n:

$$D\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \omega_K \wedge (\delta^I_J \omega^K + \delta^K_J \omega^I). \qquad (6)$$

Утверждение 2. *Проективная группа GP(n) есть главное расслоение аффинных реперов $A_{n(n+1)}(P^*_n)$ со структурными уравнениями (4; 6; 2), базой которого является двойственное проективное пространство P^*_n, а типовым слоем служит n(n+1)-членная аффинная группа $A_{n(n+1)} = GA(n)$.*

Утверждение 3. *Для задания (полной) аффинной связности $\{\Gamma^{IJ}, \Gamma^{IK}_J\}$ в расслоении $A_{n(n+1)}(P^*_n)$ достаточно произвести оснащение Бортолотти многообразия Грассмана Gr(n-1,n), т.е. к каждой гиперплоскости P_{n-1} присоединить точку $B \notin P_{n-1}$.*

3. Зафиксируем в проективном пространстве P_n точку A, тогда P_n станет центропроективным пространством $P^0_n = \{P_n, A\}$, эквивалентным расширенному коаффинному пространству $\hat{A}^*_n$. Из формулы (1_1) получим уравнения стационарности точки A: $\omega^I = 0$, которые в силу структурных уравнений (2) образуют вполне интегрируемую систему и упрощают уравнения (3; 4)

$$D\pi^I_J = \pi^K_J \wedge \pi^I_K, \ D\pi_I = \pi^J_I \wedge \pi_J \ \ (\pi = \omega|_{\omega^I=0}). \qquad (7)$$

Нашли структурные уравнения коаффинной (центропроективной) группы $GA^*(n)$, действующей в пространствах P^0_n и $\hat{A}^*_n$.

Замечание 2. Если из центропроективного пространства P^0_n удалить точку A, то получим проколотое центропроективное пространство $\overline{P^0_n}$, эквивалентное коаффинному пространству A^*_n, в котором также действует коаффинная группа $GA^*(n)$.

Из структурных уравнений (7_1) видно, что система уравнений $\pi^I_J = 0$ вполне интегрируема. Она выделяет в коаффинной группе $GA^*(n)$ n-членную подгруппу T^*_n трансляций гиперплоскостей пространства P^0_n с внешними уравнениями

$$D\overline{\pi}_I = 0 \ (\overline{\pi}_I = \pi_I |_{\pi^I_J=0}).$$

Подгруппа T^*_n абелева и является нормальным делителем группы $GA^*(n)$, поэтому имеется линейная фактор-группа $GL^*(n) = GA^*(n)/T^*_n$ со структурными уравнениями (7_1).

Утверждение 4. *Коаффинная группа $GA^*(n)$ содержит линейную подгруппу $GL(n)$, выделяемую вполне интегрируемой системой уравнений $\pi_I = 0$ и изоморфную фактор-группе $GL^*(n)$, действующей неэффективно в двух (n-1)-мерных проективных пространствах: P_{n-1} и P^*_{n-1} – связках прямых и гиперплоскостей с центром A.*

В уравнениях (3) вынесем базисные формы ω^K проективного пространства P_n:

$$D\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \omega^K \wedge (-\delta^I_J \omega_K - \delta^I_K \omega_J). \tag{8}$$

Утверждение 5. *Проективная группа $GP(n)$ есть главное расслоение коаффинных реперов $A^*_{n(n+1)}(P_n)$ со структурными уравнениями (2; 8; 4), базой которого является проективное пространство P_n, а типовым слоем служит $n(n+1)$-членная коаффинная группа $A^*_{n(n+1)} = GA^*(n)$.*

Утверждение 6. *Для задания коаффинной связности $\Gamma^I_{JK}, \Gamma_{IJ}\}$ в расслоении $A^*_{n(n+1)}(P_n)$ достаточно осуществить нормализацию Нордена пространства P_n, т.е. к каждой точке A присоединить гиперплоскость P_{n-1}, несодержащую точку A.*

4. Пусть в пространстве P_n дана 0-пара [4, с. 378] (A,P_{n-1}) с уравнениями стационарности $\omega^I = 0,\ \omega_I = 0$. В этом случае проективное пространство P_n назовем парацентропроективным пространством $P^{0,n-1}_n = \{P_n, A, P_{n-1}\}$, $A \notin P_{n-1}$. Системы уравнений (5) и (7) принимают вид

$$D\pi^I_J = \pi^K_J \wedge \pi^I_K \ \ (\pi = \omega |_{\omega^I=0,\omega_I=0}).$$

Получили структурные уравнения линейной группы GL(n), действующей в пространстве $P_n^{0,n-1}$, которое можно отождествить с n-мерным векторным пространством.

Утверждение 7. *Аффинная, коаффинная и линейная подгруппы проективной группы связаны следующими включениями:*

$$GP(n) \supset GA(n) \supset GL(n) \subset GA^*(n) \subset GP(n).$$

В проективном пространстве P_n рассмотрим 2n-мерное пространство Π_{2n} 0-пар (A, P_{n-1}), которое можно представить двумя способами: 1) к каждой точке $A \in P_n$ присоединить множество гиперплоскостей, не проходящих через точку A; 2) к каждой гиперплоскости $P_{n-1} \in P_n^*$ присоединить множество точек, не лежащих в гиперплоскости P_{n-1}. Таким образом, $\Pi_{2n} = \overline{P_n \times P_n^*} \subset P_n \times P_n^*$, где черта выделяет в прямом произведении $P_n \times P_n^*$ подмножество неинцидентных пар (A, P_{n-1}). Запишем уравнения (3) в виде

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + R_{JL}^{IK} \omega_K \wedge \omega^L, \qquad (9)$$

$$R_{JL}^{IK} = \delta_J^I \delta_L^K + \delta_J^K \delta_L^I. \qquad (10)$$

Утверждение 8. *Проективная группа GP(n) есть главное расслоение линейных реперов* $L_{n^2}(\Pi_{2n})$ *со структурными уравнениями (2; 4; 9), в котором задана связность. Базой этого расслоения является пространство 0-пар Π_{2n}, а типовым слоем служит n^2-членная линейная группа* $L_{n^2} = GL(n)$. *Иначе говоря, группа GP(n) есть пространство линейной связности* $L_{n^2,2n}$ *с n^2-мерными слоями и 2n-мерной базой, причем ненулевые компоненты тензора кривизны находятся из формулы (10).*

Список литературы

1. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

2. *Норден А.П.* Теория композиций // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т. 10. С. 117 – 145.

3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

4. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М., 1966.

Yu. Shevchenko

THREE BUNDLES OF A PROJECTIVE GROUP

The transformation group GP(n) of n-measurement projective space P_n, allocated by a factorization from a linear group GL(n+1) is considered. A projective group GP(n) is contain affine group GA(n), coaffine group GA^*(n) and linear group GL(n) being subgroups of stationarities of a hyperplane P_{n-1}, point A and 0-pair (A,P_{n-1}), $A \notin P_{n-1}$. It is shown, that the projective group GP(n) is represented by the way of three main bundles, standard layers which one the subgroups GA(n), GA^*(n) and GL(n) are: 1) affine frames over dual projective space of hyperplanes $P_n^* = Gr(n-1, n)$ – manifold of Grassmann of hyperplanes; 2) coaffine frames over initial projective space P_n = Gr (0, n) – manifold of Grassmann of points; 3) linear frames with connection over 2n-measurement space of 0-pairs Π_{2n} – subset not incident pairs (A,P_{n-1}) of direct product $P_n \times P_n^* = Gr(0, n) \times Gr(n-1, n)$.

УДК 514.75

С.Н. Юрьева
(Калининградский государственный университет)

ГИПЕРПОЛОСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОРАЗМЕРНОСТИ ДВА АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА A_n

Изучается дифференциальная геометрия гиперполосных распределений (n-2)-мерных линейных элементов аффинного пространства A_n.

Схема использования индексов такова:

$$i, j, k, l, s, t = \overline{1, n-2}; \quad \alpha, \beta, \gamma, \eta = n-1, n;$$
$$a, b, c = \overline{1, n-1}, \quad I, J, K, L = \overline{1, n}.$$

1. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n со структурными уравнениями

$$D\omega^I = \varpi^L \wedge \omega_L^I, \ D\omega_I^K = \omega_I^L \wedge \omega_L^K, \tag{1}$$