1. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. Казань, 1984.

2. *Султанов А.Я.* Горизонтальные лифты линейных связностей на расслоениях Вейля второго порядка // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2005. Вып. 36. С. 133—140.

3. *Султанов А.Я.* Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Изв. вузов. Математика. 1999. №9. С. 81—90.

K. Budanov

LIFTS OF FUNCTIONS AND VECTOR FIELDS ON WEIL BUNDLE OVER WEIL ALGEBRA OF HEIGHT 2

Lifts of functions and vector fields on Weil bundle over Weil algebra of height 2 are constructed.

УДК 514.76

К.М. Буданов, А.В. Воеводин

(Пензенский государственный педагогический университет)

О ФРОБЕНИУСОВЫХ АЛГЕБРАХ ВЕЙЛЯ ШИРИНЫ 2

Доказано существование фробениусовых алгебр Вейля ширины 2.

Пусть **A** — алгебра Вейля — коммутативная, ассоциативная алгебра **A** с единицей, обладающая нильпотентным идеалом **I** таким, что факторалгебра **A**/**I** изоморфна алгебре действительных чисел **R**.

Наименьшее натуральное число r, удовлетворяющее условию $\mathbf{I}^{r+1} = 0$, называется высотой, а размерность факторалгебры $\mathbf{I}/\mathbf{I}^2$ — шириной алгебры Вейля **A**. Алгебра **A** как векторное пространство может быть представлена в виде прямой суммы **R** ⊕ **I**.

Алгебра Вейля **A** — фробениусова, если существует невырожденная билинейная симметрическая форма g: **A**×**A**→**R**, удовлетворяющая условию:

$$g(ab,c) = g(a,bc) \tag{1}$$

для любых a, b, $c \in$ **A** [1].

Справедливо следующее

Предложение [2]. *Всякая алгебра Вейля* **A** *размерности* 4 *изоморфна одной из следующих пяти алгебр Вейля:*

1) **R**(ε^3) — *алгебра плюральных чисел высоты* 3;

2) **R**(ε_1) $\oplus_W$ **R**($\varepsilon_2{}^2$) — *сумма Уитни алгебры дуальных чисел* **R**(ε_1) *и алгебры плюральных чисел* **R**($\varepsilon_2{}^2$) *высоты* 2;

3) **R**(ε_1) $\oplus_W$ **R**(ε_2) $\oplus_W$ **R**(ε_3) — *сумма Уитни трёх алгебр дуальных чисел*;

4) *алгебра Вейля* **A** *ширины* 2 *и высоты* 2 *с псевдобазисом* (ε_1, ε_2), *базис алгебры* **A** *составляют элементы* 1, ε_1, ε_2, $\varepsilon_1{}^2$. *Определяющие соотношения алгебры* **A**: $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_2{}^2 = q\varepsilon_1{}^2$, $q = \pm 1$.

Известно, что алгебра плюральных чисел является фробениусовой. В данной работе выясняется вопрос о существовании фробениусовых алгебр ширины больше 1.

Рассмотрим алгебру Вейля **A** ширины 2 и высоты 2 с базисом $\{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1{}^2\}$ и определяющими соотношениями: $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_2{}^2 = q\varepsilon_1{}^2$, $q = \pm 1$. Введём обозначения: $1 = \varepsilon^0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon^1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon^2$, $\varepsilon_1{}^2 = \varepsilon^3$, тогда $\varepsilon^1\varepsilon^2 = 0$, $\varepsilon^2\varepsilon^2 = q\varepsilon^3$, $q = \pm 1$. Используя структурные константы алгебры **A**, можно записать

$$\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta = \gamma_\sigma^{\alpha\beta} \varepsilon^\sigma \text{, где } \alpha, \beta, \sigma = 0, 1, 2, 3. \tag{2}$$

Ненулевые структурные константы данной алгебры имеют вид:

$$\gamma_0^{00} = 1,\ \gamma_1^{01} = \gamma_1^{10} = 1,$$

$$\gamma_2^{02} = \gamma_2^{20} = 1, \gamma_3^{03} = \gamma_3^{30} = 1, \ \gamma_3^{11} = 1, \ \gamma_3^{22} = q$$

Запишем условие (1) для базисных элементов алгебры **A**:

$$g(\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta, \varepsilon^\sigma) = g(\varepsilon^\alpha, \varepsilon^\beta \varepsilon^\sigma). \tag{3}$$

Используя (2), запишем (3) в виде:

$$g(\gamma_\tau^{\alpha\beta} \varepsilon^\tau, \varepsilon^\sigma) = g(\varepsilon^\alpha, \gamma_\tau^{\beta\sigma} \varepsilon^\tau). \tag{4}$$

Учитывая, что форма g билинейна, получим:

$$\gamma_\tau^{\alpha\beta} g(\varepsilon^\tau, \varepsilon^\sigma) = \gamma_\tau^{\beta\sigma} g(\varepsilon^\alpha, \varepsilon^\tau). \tag{5}$$

Обозначим $g(\varepsilon^\mu, \varepsilon^\nu) = g^{\mu\nu}$. Тогда (5) примет вид:

$$\gamma_\tau^{\alpha\beta} g^{\tau\sigma} = \gamma_\tau^{\beta\sigma} g^{\alpha\tau}. \tag{6}$$

Пусть $\delta = \delta_\alpha \varepsilon^\alpha$ — главная единица алгебры **A**, тогда, умножая (6) на δ_α, получаем:

$$\gamma_\tau^{\alpha\beta} \delta_\alpha g^{\tau\sigma} = \gamma_\tau^{\beta\sigma} \delta_\alpha g^{\alpha\tau}. \tag{7}$$

Используя свойство структурных констант алгебры $\gamma_\tau^{\alpha\beta} \delta_\alpha = \delta_\tau^\beta$ (символ Кронекера) и вводя обозначение $\delta_\alpha g^{\alpha\tau} = g^\tau$, запишем (7) в виде:

$$\delta_\tau^\beta g^{\tau\sigma} = \gamma_\tau^{\beta\sigma} g^\tau, \tag{8}$$

и так как $\delta_\tau^\beta g^{\tau\sigma} = g^{\beta\sigma}$, то (8) примет вид:

$$g^{\beta\sigma} = \gamma_\tau^{\beta\sigma} g^\tau; \ \beta, \sigma, \tau = 0, 1, 2, 3. \tag{9}$$

Записывая (9) для конкретных значений индексов β, σ, τ, получаем:

$$\begin{aligned}
&g^{00}=g^0, \quad g^{01}=g^1, \quad g^{02}=g^2, \quad g^{03}=g^3,\\
&g^{10}=g^1, \quad g^{11}=g^3, \quad g^{12}=0, \quad g^{13}=0,\\
&g^{20}=g^2, \quad g^{21}=0, \quad g^{22}=qg^3, \quad g^{23}=0,\\
&g^{30}=g^3, \quad g^{31}=0, \quad g^{32}=0, \quad g^{33}=0.
\end{aligned}$$

Вычислим определитель матрицы коэффициентов формы g:

$$\Delta=\begin{vmatrix} g^0 & g^1 & g^2 & g^3\\ g^1 & g^3 & 0 & 0\\ g^2 & 0 & qg^3 & 0\\ g^3 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=-q\left(g^3\right)^4.$$

Если $g^3 \neq 0$, то $\Delta \neq 0$ и форма g является невырожденной.

Рассмотрим алгебру Вейля $\mathbf{R}(\varepsilon_1) \oplus_W \mathbf{R}(\varepsilon_2{}^2)$. Её базисом является $\{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_2{}^2\}$, где $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1\varepsilon_2{}^2 = 0$, $\varepsilon_1{}^2 = 0$, $\varepsilon_2{}^3 = 0$. Обозначим $1 = \varepsilon^0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon^1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon^2$, $\varepsilon_2{}^2 = \varepsilon^3$, тогда $\varepsilon^1\varepsilon^2 = 0$, $\varepsilon^1\varepsilon^3 = 0$, $\varepsilon^1\varepsilon^1 = 0$, $\varepsilon^2\varepsilon^3 = 0$. Ненулевые структурные константы данной алгебры имеют вид:

$$\gamma_0^{00}=1,\ \gamma_1^{01}=\gamma_1^{10}=1,\ \gamma_2^{02}=\gamma_2^{20}=1,$$
$$\gamma_3^{03}=\gamma_3^{30}=1,\ \gamma_3^{22}=1.$$

Коэффициенты формы g равны:

$$\begin{aligned}
&g^{00}=g^0, \quad g^{01}=g^1, \quad g^{02}=g^2, \quad g^{03}=g^3,\\
&g^{10}=g^1, \quad g^{11}=0, \quad g^{12}=0, \quad g^{13}=0,\\
&g^{20}=g^2, \quad g^{21}=0, \quad g^{22}=g^3, \quad g^{23}=0,\\
&g^{30}=g^3, \quad g^{31}=0, \quad g^{32}=0, \quad g^{33}=0.
\end{aligned}$$

Вычислим определитель матрицы коэффициентов формы g:

$$\Delta = \begin{vmatrix} g^0 & g^1 & g^2 & g^3 \\ g^1 & 0 & 0 & 0 \\ g^2 & 0 & g^3 & 0 \\ g^3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

Отсюда получаем, что форма g является вырожденной.

Рассмотрим алгебру $\mathbf{R}(\varepsilon_1) \oplus_W \mathbf{R}(\varepsilon_2) \oplus_W \mathbf{R}(\varepsilon_3)$. Её базисом является $\{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, где $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_1\varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_2\varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_1{}^2 = 0$, $\varepsilon_2{}^2 = 0$, $\varepsilon_3{}^2 = 0$. Обозначим $1 = \varepsilon^0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon^1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon^2$, $\varepsilon_3 = \varepsilon^3$, тогда $\varepsilon^1\varepsilon^2 = 0$, $\varepsilon^1\varepsilon^3 = 0$, $\varepsilon^2\varepsilon^3 = 0$, $\varepsilon^1\varepsilon^1 = 0$, $\varepsilon^2\varepsilon^2 = 0$, $\varepsilon^3\varepsilon^3 = 0$. Ненулевые структурные константы данной алгебры имеют вид:

$$\gamma_0^{00} = 1,\ \gamma_1^{01} = \gamma_1^{10} = 1,\ \gamma_2^{02} = \gamma_2^{20} = 1,\ \gamma_3^{03} = \gamma_3^{30} = 1 .$$

Коэффициенты формы g равны:

$$\begin{array}{llll} g^{00} = g^0, & g^{01} = g^1, & g^{02} = g^2, & g^{03} = g^3, \\ g^{10} = g^1, & g^{11} = 0, & g^{12} = 0, & g^{13} = 0, \\ g^{20} = g^2, & g^{21} = 0, & g^{22} = 0, & g^{23} = 0, \\ g^{30} = g^3, & g^{31} = 0, & g^{32} = 0, & g^{33} = 0. \end{array}$$

Вычислим определитель матрицы коэффициентов формы g:

$$\Delta = \begin{vmatrix} g^0 & g^1 & g^2 & g^3 \\ g^1 & 0 & 0 & 0 \\ g^2 & 0 & 0 & 0 \\ g^3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем, что форма g является вырожденной.

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Теорема. *Среди алгебр Вейля ранга 4 существуют фробениусовы алгебры ширины 2. С точностью до изоморфизма такими алгебрами являются алгебры Вейля* **A** *с базисом, со-*

стоящим из элементов $\{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1^2\}$. *Определяющие соотношения алгебр* **A** *имеют вид:* $\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_2^2 = q\varepsilon_1^2$, $q = \pm1$.

Список литературы

1. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. Казань, 1984.
2. *Султанов А.Я.* О дифференцированиях свободных алгебр Вейля и их представлениях на расслоениях Вейля // Сборник трудов Международного геометрического семинара им. Г.Ф. Лаптева. Пенза, 2004.

K. Budanov, A. Voevodin

ON FROBENIUS WEIL ALGEFRA OF WIDTH 2

The existence of Frobenius Weil algebra of width 2 is proved.

УДК 514.75

С.Ю. Волкова

(Балтийский военно-морской институт)

ПОЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И ОХВАЧЕННЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ S-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Продолжается исследование S-распределений проективного пространства P_n [1]. Построены поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов S-распределения.

Во всей работе мы придерживаемся следующей схемы использования индексов: