

Д. С. Климентов 

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

dklimentov75@gmail.com

SPIN-код: 7449-8567, AuthorID: 9418

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-4

О построении второй основной формы поверхности почти ограниченного искривления положительной кривизны

В статье предлагается способ построения второй основной формы поверхности класса C^1 положительной кривизны. Используется вероятностный подход к этой задаче, дается понятие второй производной Ито вдоль направления броуновского движения.

Ключевые слова: главная поверхность почти ограниченного искривления, гауссова кривизна, вторая производная Ито по направлению броуновского движения, вторая форма поверхности

1. Предварительные сведения

Пусть S — поверхность положительной кривизны класса C^1 в пространстве E^3 .

Определение 0.1. Поверхность класса C^1 мы будем называть *поверхностью почти ограниченного искривления*.

Введем следующие обозначения: параметризация поверхности $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$; $\vec{n}$ — нормаль к поверхности S ; D — область изменения параметров (x^1, x^2) ; $B_t(B_t^1, B_t^2)$ — каноническое броуновское движение на D . Не ограничивая общности,

Поступила в редакцию 26.12.2025 г.

© Климентов Д. С., 2026

будем считать, что вторая основная форма поверхности S приведена к изотермическому виду:

$$II = \mu((dx^1)^2 + (dx^2)^2).$$

Приведем некоторые понятия из теории меры и теории случайных процессов.

Определение 1.1. σ -полем (σ -алгеброй) над множеством Ω будем называть семейство множеств, замкнутое относительно операций $\cap$ и $\cup$, содержащее множества $\emptyset$ и Ω (см.: [2, с. 145]). Минимальное σ -поле над T , содержащее все открытые в T множества, называется *борелевским σ -полем* и обозначается $\mathfrak{B}(T)$.

Замечание 1.1. При определении борелевского σ -поля мы использовали пространство T , а не Ω , потому что на T уже задана топология (топология, порожденная метрикой), а на Ω такой структуры мы не задали. Однако если считать Ω топологическим пространством, то определение борелевского σ -поля можно формулировать и для него. В дальнейшем мы будем использовать понятия как множества, так и пространства Ω . Такая терминология обусловлена традицией в теории случайных процессов.

Определение 1.2. Множество Ω вместе с σ -полем $\mathcal{F}$ над ним назовем *измеримым пространством* [2, с. 145].

Рассмотрим теперь измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с σ -полем $\mathcal{F}$, мерой P и некоторым пространством Ω .

Определение 1.3. Мере P будем называть σ -аддитивной [2, с. 145], если для не более чем счетного набора множеств, попарно не пересекающихся по лем A_n , $n \in \mathbb{N}$, имеет место равенство $P(\cup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$.

Определение 1.4. Любую σ -аддитивную меру P на пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ мы будем называть *вероятностной мерой* на Ω , если $P(\Omega) = 1$, а тройку $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — *вероятностным пространством*. Множества из $\mathcal{F}$ будем называть *событиями* [2, с. 145].

Дадим теперь определение случайного процесса.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство и $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ — возрастающее семейство под- σ -полей из $\mathcal{F}$, то есть $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_s$ при $0 \leq t \leq s$. Семейство $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ будем называть *поток* на Ω и предполагать, что поток непрерывен справа: [1, с. 29]: $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$.

Определение 1.5. Набор $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ мы будем называть *стохастическим базисом* на Ω .

Определение 1.6. Функцию $\xi = \xi(\omega)$ со значениями в некотором топологическом измеримом пространстве $\mathcal{U}$, определенную на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, назовем *случайной величиной* [2, с. 184], если для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathcal{U})$

$$\{\omega: \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Определение 1.7. Для интегрируемой (действительной или комплексной) случайной величины ξ число

$$E(\xi) = \int_{\Omega} \xi(\omega) P(d\omega),$$

где интеграл мы понимаем в смысле Лебега, назовем *математическим ожиданием* этой случайной величины [1, с. 20].

Пусть $W^d = C([0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ — множество всех непрерывных функций $w: [0, \infty] \ni t \mapsto w(t) \in \mathbb{R}^d$. Определим на W^d метрику ρw следующим образом (см.: [1, с. 25]):

$$\rho w(w_1, w_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\max_{\{0 \leq t \leq n\}} |w_1(t) - w_2(t)| \right) \wedge 1 \right],$$

где $a \wedge b = \min(a, b)$ и $w_1, w_2 \in W^d$.

Можно показать, что пространство W^d полно и сепарабельно в этой метрике [1, с. 25]. Через $\mathfrak{B}(W^d)$ мы будем обозначать борелевское σ -поле, натянутое на пространство W^d с топологией, порожденной метрикой ρw .

Определение 1.8. *Непрерывным -мерным случайным процессом*, заданным на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с фазовым пространством $\mathbb{R}^d$, мы будем называть случайную величину со значениями во множестве $W^d = C([0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ всех непрерывных функций $w: [0, \infty] \ni t \mapsto w(t) \in \mathbb{R}^d$, то есть $\frac{\mathcal{F}}{\mathfrak{B}(W^d)}$ измеримое отображение $X: \Omega \rightarrow W^d$ (см.: [1, с. 25]). При всяком фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $X(t, \omega)$ называется *траекторией* случайного процесса. Процесс назовем *непрерывным справа*, если его траектории непрерывны справа.

Замечание 1.2. В определении -мерного случайного процесса фазовое пространство $\mathbb{R}^d$ можно заменить каким-либо другим топологическим пространством $\mathcal{U}$ и говорить о случайном процессе с фазовым пространством $\mathcal{U}$.

Определение 1.9. Действительный случайный процесс $X = (X_t)_{t \in T}$ называется *мартингалом относительно потока* σ -полей из $(\mathcal{F}_t)$ (см.: [1, с. 34]), если выполняются следующие условия:

- 1) случайная величина X_t интегрируема для каждого $t \in T$;
- 2) процесс $X = (X_t)_{t \in T}$ согласован с $(\mathcal{F}_t)$;
- 3) $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ п. н. для любых $t, s \in T$, $s < t$.

Здесь и далее сокращение «п. н.» означает «почти наверное», то есть равенство выполняется с вероятностью 1.

Введем следующие обозначения:

- $\mathcal{M}$ — пространство всех непрерывных локально квадратично интегрируемых мартингалов $M = M_t$ относительно $(\mathcal{F})_t$ с $M_0 = 0$ п. н.;

- $\mathcal{A}_+$ — семейство всех непрерывных $(\mathcal{F}_t)$ -согласованных процессов $A = A_t$ таких, что $A_0 = 0$ и $t \rightarrow A_t$ п. н. не убывает;

- $\mathcal{A}$ — семейство всех непрерывных $(\mathcal{F}_t)$ -согласованных процессов $A = A_t$ таких, что $A_0 = 0$ и $t \rightarrow A_t$ является функцией с конечной вариацией на каждом конечном интервале п. н.;

• $\mathcal{B}$ — семейство всех непрерывных $(\mathcal{F}_t)$ -предсказуемых процессов $\Phi = \Phi_t$ таких, что с вероятностью единица $t \rightarrow \Phi_t$ является ограниченной функцией на каждом конечном интервале.

Определение 1.10. Пусть $X = X_t$ — случайный процесс, представимый в виде (см.: [1, с. 105])

$$X_t = X_0 + M_t + A_t,$$

где $X_0 - \mathcal{F}_0$ — измеримая случайная величина, $M \in \mathcal{M}$, $A \in \mathcal{A}$.

Будем называть такой процесс *квазимартингалом*. Совокупность всех квазимартингалов обозначим $\mathcal{Q}$.

Определение 1.11. Будем говорить, что квазимартингалы $X, Y \in \mathcal{Q}$ *эквивалентны*, если с вероятностью единица

$$-X_s = Y_t + Y_s$$

для всех $0 \leq s \leq t$ (см.: [1, с. 106]).

Класс эквивалентности, содержащий X , будем обозначать dX и называть *стохастическим дифференциалом* X .

Подробнее о свойствах стохастического дифференциала можно посмотреть, например, в [1].

Приведем теперь одну из возможных формулировок формулы Ито:

Теорема 1.1 (Формула Ито) [2, с. 26]. Пусть n -мерный процесс X_t имеет стохастический дифференциал, $u(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда случайный процесс $u(X_t)$ имеет стохастический дифференциал и

$$du(X_t) = \partial_i u(X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \partial_{ij} u(X_t) dX_t^i dX_t^j.$$

Здесь мы используем обычное в дифференциальной геометрии соглашение о суммировании, где по повторяющимся индексам идет сложение от единицы до размерности пространства.

Подробнее о теории случайных процессов см., например, в [3].

2. Основной результат

2.1. Вторая производная Ито вдоль траектории броуновского движения

На поверхности S имеет место формула Ито [1, с. 73]

$$df(Z_t) = \partial_i f(Z_t) dZ_t^i + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j f(Z_t) dZ_t^i dZ_t^j,$$

где d — стохастический дифференциал, f — дважды дифференцируемая функция, Z_t — диффузионный процесс на S . Необходимо отметить, что мы рассматриваем диффузионный процесс с нулевыми сносом и вероятностью обрыва.

Возьмем вместо случайного процесса Z_t каноническое броуновское движение, которое совпадает с процессом X_t [2]:

$$df(B_t) = \partial_i f(B_t) dB_t^i + \frac{1}{2} [\partial_{11} f(B_t) dt + \partial_{22} f(B_t) dt]. \quad (1)$$

Здесь мы воспользовались свойством броуновского движения $dB^i dB^j = \delta^{ij} dt$ [2, с. 21].

Рассмотрим последнюю формулу для двух частных случаев:

$$1) Z_1 = (B_t^1, v);$$

$$2) Z_2 = (u, B_t^2).$$

Здесь $u, v \in R$ — числа из области параметризации поверхности. Подставим процессы Z_1 и Z_2 в формулу (1):

$$df(Z_1) = \partial_1 f(Z_1) dB_t^1 + \frac{1}{2} \partial_{11} f(Z_1) dt,$$

$$df(Z_2) = \partial_1 f(Z_2) dB_t^2 + \frac{1}{2} \partial_{22} f(Z_2) dt.$$

Выразим отсюда вторые производные:

$$\partial_{11} f(Z_1) dt = 2(df(Z_1) - \partial_1 f(Z_1) dB_t^1),$$

$$\partial_{22} f(Z_2) dt = 2(df(Z_2) - \partial_1 f(Z_2) dB_t^2).$$

Определение 2.1. *Второй производной Ито вдоль траектории броуновского движения B^1 (B^2) назовем*

$$\partial_{11I}f(Z_1)dt = 2(df(Z_1) - \partial_1f(Z_1)dB_t^1), \quad (2)$$

$$\partial_{22I}f(Z_2)dt = 2(df(Z_2) - \partial_1f(Z_2)dB_t^2).$$

В дальнейшем вторую производную Ито вдоль соответствующей траектории будем обозначать $f_{11;I_1}$ вдоль траектории B_1 и $f_{22;I_2}$ вдоль траектории B_2 .

2.2. Построение второй формы поверхности почти ограниченного искривления положительной кривизны

Будем придерживаться следующих обозначений. Пусть S — гладкая поверхность гауссовой кривизны (можно считать, что ее вторая форма положительно определена) класса C^3 с основными формами $I = g_{ij}dx^i dx^j$, $II = b_{ij}dx^i dx^j$. По-прежнему диффузии, ими порожденные, будем обозначать X_t, Y_t . Переходная плотность и переходная функция соответствующего случайного процесса обозначается $p_t^i(\vec{x}, \vec{y})$, $P^i(t, \vec{x}, \Gamma)$, где $i = 1$ соответствует первой форме, $i = 2$ — второй, Γ — борелевское множество на нашей поверхности. Нормаль к поверхности S будем обозначать $\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$.

Не ограничивая общности, будем считать, что вторая форма поверхности S приведена к изотермическому виду:

$$II = \mu ((dx^1)^2 + (dx^2)^2).$$

Имеет место

Теорема 2.1. *Пусть S — поверхность класса C^3 положительной кривизны. Тогда на траекториях процессов Z_1 и Z_2 вторая форма поверхности может быть записана в виде*

$$II dt = \frac{(\vec{r}_{11I}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} ((dx^1)^2 + (dx^2)^2),$$

где $|I|$ — дискриминант первой формы поверхности, равенство верно на траекториях процесса Z_1 ;

$$I|dt = \frac{(\vec{r}_{22I}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} ((dx^1)^2 + (dx^2)^2),$$

где $|I|$ — дискриминант первой формы поверхности, равноство верно на траекториях процесса Z_2 .

Доказательство. В силу наших предположений вторая форма поверхности приведена к изотермическому виду:

$$\Pi = \mu((dx^1)^2 + (dx^2)^2). \quad (3)$$

Хорошо известна формула для коэффициентов второй формы поверхности (см.: [4, с. 237]):

$$b_{ij} = \frac{(\vec{r}_{ijI}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = \frac{(\vec{r}_{ijI}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}. \quad (4)$$

Поскольку в выражении (3) отсутствует смешанная производная, то нас интересуют только выражения для b_{11} и b_{22} .

Сузим равенство (4) на множество $Z_t^1 = (B_t^1, c)$, где c — постоянная из области определения поверхности. На этом множестве мы можем заменить производную $\vec{r}_{11}$ по формуле (2), предварительно умножив (4) на dt :

$$b_{11}dt = \frac{(\vec{r}_{11I}dt, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|} = \frac{(2(d\vec{r}(Z_1) - \partial_1\vec{r}(Z_1)dB_t^1)dt, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}.$$

Подставим последнее выражение в равенство (3) и получим первое утверждение теоремы.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. $\square$

Рассмотрим поверхность S класса C^1 (поверхность почти ограниченного искривления) положительной кривизны (здесь под положительной кривизной будем понимать кривизну, определенную в работе [7], для простоты можно считать, что аппроксимирующие поверхности имеют положительную гауссову кривизну). Для нее определим вторую основную форму на траекториях процессов Z_1 и Z_2 .

Далее будем считать, что S — поверхность положительной кривизны класса C^1 с первой основной формой $I = g_{ij}dx^i dx^j$ и параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$. По-прежнему диффузию,

порожденную первой формой, будем обозначать X_t . Переходную плотность и переходную функцию случайного процесса X_t обозначим $p_t^1(\vec{x}, \vec{y})$, $P^1(t, \vec{x}, \Gamma)$, нормаль к поверхности S — $\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$, броуновское движение на E^2 — $B_t = (B_t^1, B_t^2)$.

Будем рассматривать последовательность вектор-функций $\{\vec{r}^n(x^1, x^2)\}$, сходящуюся к вектор-функции $\vec{r}(x^1, x^2)$ в метрике C^1 . Кроме того, будем считать, что все вектор-функции определены на одной области $D \subset E^2$.

Определим вторую форму поверхности S на траекториях процессов Z_1 и Z_2 формально, по формулам, выведенным в теореме 2.1.

Не ограничивая общности, будем считать, что на аппроксимирующих поверхностях $\vec{r}^n = \vec{r}^n(x^1, x^2)$ вторая основная форма приведена к изотермическому виду

$$II^n = \mu^n((dx^1)^2 + (dx^2)^2).$$

Теорема 2.2. *На траекториях (B_t^1, v) и (u, B_t^2) имеет место равенство*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^n = \mu.$$

Доказательство. Докажем нашу теорему для траекторий (B_t^1, v) . Случай для траекторий (u, B_t^2) доказывается аналогично.

На траекториях (B_t^1, v) коэффициент второй формы имеет вид

$$\mu(B_t^1, v)dt = \frac{(\vec{r}_{11I}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}$$

и $\vec{r}_{11I} = (2(d\vec{r}(Z_1) - \partial_1 \vec{r}(Z_1)dB_t^1), \vec{r}_1, \vec{r}_2)$. По предположению, $\vec{r}_i^{(k)} \rightarrow \vec{r}_i$, $d\vec{r}^{(k)} \rightarrow d\vec{r}$ в силу определения стохастического дифференциала.

В самом деле, обозначим $\Delta^k = \vec{r}^{(k)}(Z_1(t)) - \vec{r}^{(k)}(Z_1(s))$, $k = 0, \dots, \infty$. Рассмотрим разность $\Delta^k - \Delta$. Очевидно, что $\Delta^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то есть $d\vec{r}^{(k)} \rightarrow d\vec{r}$.

Таким образом, мы получили, что $\mu^k(B_t^1, v) \rightarrow \mu(B_t^1, v)$.

Теорема доказана. $\square$

Итак, мы получили, что формальное определение второй формы поверхности S законно, и коэффициенты вторых форм аппроксимирующих поверхностей сходятся к формально определенному коэффициенту второй формы поверхности S .

Список литературы

1. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
2. Анулова С. В., Веретенников А. Ю., Крылов Н. В., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Стохастическое исчисление // Итоги науки и техн. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1989. Т. 45. С. 5—253.
3. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М., 1963.
4. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М., Л., 1939.
5. Бакельман И. Я. Дифференциальная геометрия гладких нерегулярных поверхностей // Успехи математических наук. 1956. Т. 11, № 2 (68). С. 67—124.
6. Климентов Д. С. Стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей ограниченного искривления положительной кривизны // Уфимский математический журнал. 2019. Т. 11, № 4. С. 41—49.
7. Александров А. Д., Залгаллер В. А. Двумерные многообразия ограниченной кривизны (Основы внутренней геометрии поверхностей) // Тр. МИАН СССР. Т. 63. М.; Л., 1962. С. 3—262.

Для цитирования: Климентов Д. С. О построении второй основной формы поверхности почти ограниченного искривления положительной кривизны // ДГМФ. 2026. № 57 (1). С. 52—63. doi: 10.5922/0321-4796-2025-57-1-4.



MSC 2010: 53A99, 60D05

D. S. Klimentov 

Southern Federal University,
8a, Milchakow, st., 344090, Rostov-on-Don, Russia
dklimentov75@gmail.com

ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-2097-452X>

doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-4

On construction of the second basic shape of the surface
of almost limited curvature of positive curvature

Submitted on December 26, 2025

This article proposes a method for constructing the second fundamental form of a C^1 surface of positive curvature. It is well known that constructing the second fundamental form of a surface requires at least a twice continuously differentiable parametrization. This paper uses a probabilistic approach to this problem, introducing the concept of the second Itô derivative along the direction of Brownian motion. In more detail, we define the second derivative “without the second derivative”. For this, we use the Itô formula, restricted to special random processes. Using the proposed construction, we can write Weingarten's equations for surfaces of almost bounded curvature (the paper has been accepted for publication in the Ufa Mathematical Journal) and determine the mean curvature almost surely over the entire surface pointwise. To some extent, this paper can be viewed as a generalization of I. Ya. Bakelman's work “Differential Geometry of Smooth Irregular Surfaces” (see [5]). In the author's opinion, further reduction of surface smoothness is difficult to achieve using analytical methods (the technique developed in [5]), and new research methods are needed. This paper proposes one such method: a stochastic framework for studying low-smoothness surfaces. Previously, a slightly different approach was used, based on transition functions and transition densities of random processes; see, for example, [6] (which also contains references to earlier works).

Keywords: main surface of almost limited curvature, Gaussian curvature, second derivative of Ito in the direction of Brownian motion, second form of a surface

References

1. *Watanabe, S., Ikeda, N.*: Stochastic differential equations and diffusion processes. Moscow (1986).
2. *Anulova, S. V., Veretennikov, A. Yu., Krylov, N. V., Liptser, R. Sh., Shiryayev, A. N.*: Stochastic calculus. Itogi Nauki i Tekhn. Series Sovrem. probl. mat. Fundam. directions, 45, 5—253 (1989).
3. *Dynkin, E. B.*: Markov processes. Moscow (1963).
4. *Rashevsky, P. K.*: Course of differential geometry. Moscow, Leningrad (1939).
5. *Bakelman, I. Y.*: Differential geometry of smooth irregular surfaces. Russian Mathematical Surveys, **11**:2(68), 67—124 (1956).
6. *Klimentov, D. S.*: Stochastic analogue of fundamental theorem of surface theory for surfaces of bounded distortion and positive curvature. Ufa Math. J., **11**:4, 40—48 (2019).
7. *Aleksandrov, A. D., Zalgaller, V. A.*: Two-dimensional manifolds of bounded curvature (Fundamentals of intrinsic geometry of surfaces). Proceedings of the Steklov Mathematical Institute of the USSR, 63, Moscow, Leningrad, 3—262 (1962).

For citation: Klimentov, D.S.: On geodesic points of six-dimensional planar Hermitian submanifolds of Cayley algebra. DGMF, 57 (1), 52—63 (2026). doi: 10.5922/0321-4796-2026-57-1-4.

