ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

Е.В.Силаев

О СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЕ ПОВЕРХНОСТИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ГИПЕРСФЕРЕ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе изучаются свойства средней кривизны поверхности, лежащей на гиперсфере в евклидовом пространстве E_n, а также свойства некоторого тетраэдра, построенного в каждой точке такой поверхности с помощью вектора средней кривизны. В применяемых построениях учитывается объемлющее пространство E_n.

п.1. Пусть поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ с центром в точке O и радиусом r евклидова пространства E_n. Присоединим к поверхности V_p подвижной репер $R=\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$ $(i,j=1,\dots,p;\ \alpha,\beta=p+1,\dots,n)$ так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ лежали в касательном пространстве $T_x(V_p)$, а векторы $\vec{e}_\alpha$ составляли ортонормированный базис ортогонального дополнения N_x к пространству T_x в точке x. Пусть $\vec{x}=\overrightarrow{Ox}$.

Деривационные формулы репера имеют вид:

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i,\ d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha,\ d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta.$$

При смещении точки x вдоль поверхности V_p имеем $\omega^\alpha=0$. Дифференцируя эти уравнения внешним образом и применяя лемму Картана, получим: $\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j$, $b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha$.

Пусть $\vec{M}$ - вектор средней кривизны поверхности V_p по отношению к пространству E_n, $\vec{M}_S$ - вектор средней кривизны поверхности V_p по отношению к гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$.

В работе [5] доказано, что

$$\vec{M}=\vec{M}_S-\frac{1}{r^2}\vec{x}. \tag{1}$$

Приведем другое доказательство этой формулы. Для этого воспользуемся теоремой [2]:

Пусть в $V_{n_1}\subset V_n$ задано V_{n_2}. Вектор средней кривизны V_{n_2} по отношению к V_n равен сумме векторов средней кривизны V_{n_2} по отношению к V_{n_1} и вектора средней кривизны по отношению к V_n некоторого $V_{n_2}^*$, которое в рассматриваемой точке касается и в этой точке является геодезическим по отношению к V_{n_1}.

В рассматриваемом случае $V_{n_2}=V_p$, $V_{n_1}=S_{n-1}(O,r)$, $V_n=E_n$. В качестве $V_{n_2}^*$ в точке x рассмотрим многообразие, образованное в окрестности точки x точками всех геодезических линий гиперсферы $S_{n-1}(O,r)$ (т.е. больших окружностей), проходящих через эту точку [2].

Пусть векторы $\vec{e}_i$ репера R ортогональны. Через точку x в направлении вектора $\vec{e}_i$ проведем такую большую окружность. Вектор вынужденной кривизны этой линии $\vec{\mathcal{K}}_{N(i)}=-\frac{1}{r^2}\vec{x}$. Тогда [2] векторное среднее векторов вынужденной кривизны по отношению к p взаимно ортогональным направлениям не зависит от специального выбора этих направлений и совпадает с вектором средней кривизны $V_{n_2}^*$:

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\vec{\mathcal{K}}_{N(i)}=-\frac{1}{r^2}\vec{x}.$$

Итак, $\vec{M}=\vec{M}_S-\frac{1}{r^2}\vec{x}$. Можно доказать, что для поверхности V_p, лежащей на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)\subset E_n$, справедливо равенство:

$$\vec{M}\cdot\vec{x}=-1 \tag{2}$$

Учитывая формулу (1), получим: $\vec{M}_S\cdot\vec{x}=0$.

Пусть $|\vec{M}|$, $|\vec{M}_S|$ - средние кривизны поверхности V_p, лежащей на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)\subset E_n$, по отношению к E_n и $S_{n-1}(O,r)$ соответственно.

Т е о р е м а. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r)\subset E_n$, то: 1/ $|\vec{M}_S|<|\vec{M}|$, $|\vec{M}_S|=\mathrm{const}\Leftrightarrow|\vec{M}|=\mathrm{const}$; 2/ $|\vec{M}|=\mathrm{const}$ тогда и только тогда, когда величина угла между векторами $\vec{M}$ и $\vec{x}$ постоянна; 3/ $|\vec{M}|=\mathrm{const}$ тогда и только тогда, когда величина угла между векторами $\vec{M}$ и $\vec{M}_S$ постоянна.

Справедливость этой теоремы следует из равенств (1) и (2).

Пусть $\vec{M}_s \neq 0$, т.е. поверхность V_p не минимальна относительно гиперсферы $S_{n-1}(O,r)$, тогда $|\vec{M}| \neq \frac{1}{r}$. Рассмотрим центр средней кривизны Z поверхности V_p по отношению к евклидовому пространству E_n: $\vec{OZ} = \vec{x} + \vec{M}/\vec{M}^2$ и центр средней кривизны Z_s поверхности V_p по отношению к гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$: $\vec{OZ}_s = \vec{x} + \vec{M}_s/\vec{M}_s^2$. Можно доказать, что $\vec{OZ}_s = \frac{r^2\vec{M}^2}{r^2\vec{M}^2-1}\vec{OZ}$, $\vec{OZ}_s \cdot \vec{OZ} = r^2$, т.е. справедлива

Т е о р е м а. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r) \subset E_n$, $\vec{M}_s \neq \vec{0}$, то центры средних кривизн поверхности V_p по отношению к E_n и $S_{n-1}(O,r)$ инверсны относительно гиперсферы $S_{n-1}(O,r)$.

С л е д с т в и е. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r) \subset E_n$, $\vec{M}_s \neq \vec{0}$ то в силу того, что $\vec{OZ}_s^2 = \frac{r^4\vec{M}^2}{r^2\vec{M}^2-1} > r^2$, центры средних кривизн Z_s и Z лежат вне и внутри гиперсферы $S_{n-1}(O,r)$ соответственно.

Можно доказать, что справедлива

Т е о р е м а. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r) \subset E_n$, то $\vec{M}_s = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $Z = 0$.

Так как точки Z и Z_s инвариантно связаны с поверхностью V_p, то расстояние между ними является инвариантом, геометрический смысл которого раскрывает следующая

Т е о р е м а. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r) \subset E_n$, $\vec{M}_s \neq \vec{0}$, то расстояние между точками Z и Z_s равно $1/|\vec{M}|$.

п.2. Пусть векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha = p+1, \ldots, p+q)$ образуют базис плоскости главной нормали $N_q(x)$ в точке x [1] поверхности, лежащей на гиперсфере $S_{n-1}(O,r) \subset E_n$, O' – ортогональная проекция центра O гиперсферы на плоскость $N_q(x)$. Следовательно, в точке x имеются три вектора: $\vec{Ox}, \vec{O'x}, \vec{M}$, которые в общем случае линейно независимы.

Таким образом, с каждой точкой x рассматриваемой поверхности связан тетраэдр (который назовем тетраэдром T), построенный на указанных векторах, отложенных от точки x. Заметим, что одной из граней этого тетраэдра является треугольник OxM, площадь которого вычисляется с учетом формулы (2) следующим образом:

$$S^2_{\Delta OxM} = \frac{1}{4}\vec{M}^2 r^2 \sin^2(\widehat{\vec{M},\vec{x}}) = \frac{1}{4}\vec{M}^2 r^2\left(1-\cos^2(\vec{M},\vec{r}^2)\right) = \frac{1}{4}(\vec{M}^2 r^2 - 1).$$

Итак, рассматриваемая поверхность V_p имеет постоянную среднюю кривизну относительно E_n тогда и только тогда, когда $S_{\Delta OxM} = \mathrm{Const}$. Учитывая, что для поверхности V_p, лежащей на гиперсфере $S_{n-1}(O,r) \subset E_n$, имеет место формула $\vec{M} \cdot \vec{O'x} = -1$, можно найти

$$S^2_{\Delta O'xM} = \frac{1}{4}(\vec{M}^2|\vec{O'x}|^2 - 1).$$

Так как $|\vec{O'x}| = r\cos\alpha$, $\vec{M}^2|\vec{O'x}|^2 = \frac{1}{\cos^2\beta}(\vec{M}\cdot\vec{O'x})^2 = \frac{1}{\cos^2\beta}$, где α и β – величины углов OxO' и $O'xM$ соответственно, то объем тетраэдра T вычисляется следующим образом:

$$V_T^2 = \left(\frac{1}{3}S_{\Delta O'xM} \cdot |\vec{OO'}|\right)^2 = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4}(\vec{M}^2|\vec{O'x}|^2 - 1)(r^2 - |\vec{O'x}|^2) = \frac{r^2}{36}\,\mathrm{tg}\beta\,\sin\alpha.$$

Итак, рассматриваемая поверхность V_p обладает тем свойством, что $V_T = \mathrm{Const}$, тогда и только тогда, когда $\mathrm{tg}\beta\,\sin\alpha = \mathrm{Const}$.

З а м е ч а н и е. Тетраэдр T ортоцентрический, т.е. имеет три пары взаимно перпендикулярных противоположных ребер, тогда и только тогда, когда $\vec{O'x} \perp \vec{OM}$, т.е. тогда и только тогда, когда $|\vec{O'x}| = 1$.

Запишем параметрические уравнения индикатрисы кривизны [3] поверхности V_p в точке x: $Z^a = b^a_{ij}a^i a^j$, $\gamma_{ij}a^i a^j = 1$, где Z^a – координаты текущей точки индикатрисы кривизны относительно репера $\{x, \vec{e}_a\}$, $\vec{a} = a^i\vec{e}_i \in T_x$, $|\vec{a}| = 1$, $\gamma_{ij} = \vec{e}_i\vec{e}_j$. Используя формулы $\sum_a x^a b^a_{ij} + \gamma_{ij} = 0$, полученные в работе [4], имеем: $\sum_a x^a b^a_{ij}a^i a^j + \gamma_{ij}a^i a^j = 0$, т.е. $\sum_a x^a Z^a + 1 = 0$ $(\vec{x} = x^\alpha\vec{e}_\alpha)$. Следовательно, индикатриса кривизны поверхности V_p в точке лежит в плоскости $\Pi_{q-1}(x)$: $\sum x^a Z^a + 1 = 0$. Рассмотрим точку $\vec{S} = \vec{x} + \vec{M} = \vec{x} + \frac{1}{p}\gamma^{ij}b^a_{ij}\vec{e}_a$, $\gamma_{ij}\gamma^{jk} = \delta^k_i$. Эта точка принадлежит плоскости Π_{q-1}, так как

$$\sum_a x^a\left(\frac{1}{p}\gamma^{ij}b^a_{ij}\right) + 1 = \vec{x}\cdot\vec{M} + 1 = 0.$$

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r) \subset E_n$, то индикатриса кривизны такой поверхности лежит в плоскости $\Pi_{q-1}(x)$, проходящей через точку $\vec{S}=\vec{x}+\vec{M}$, нормальным вектором которой является вектор $\overrightarrow{O'x} = x^a \vec{e}_a$.

Заметим, что точка O' принадлежит плоскости $\Pi_{q-1}(x)$ тогда и только тогда, когда $\sum_a x^a(-x^a)+1=0$, т.е. тогда и только тогда, когда $|\overrightarrow{O'x}|=1$. Приведенное выше замечание позволяет сделать вывод, что справедлива

Т е о р е м а. Если поверхность V_p принадлежит гиперсфере $S_{n-1}(O,r) \subset E_n$, то тетраэдр T является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда для любой точки x такой поверхности плоскость $\Pi_{q-1}(x)$, в которой лежит индикатриса кривизны, проходит через точку O'

Список литературы

1. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. - Лит. матем. сб., 1966, №4, с. 475-492.

2. Схоутен И.А., Стройк Д.Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т.II. М., 1948, с. 99.

3. Базылев В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи p-поверхности евклидова пространства. - Сибирский матем. журнал, 1966, №3, с. 499-511.

4. Силаев Е.В. О p-сопряженных системах на гиперсфере в евклидовом пространстве E_n. - Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 12. Калининград, 1981, с. 84-87.

5. Jano Kentaro. Submanifolds with parallel mean curvature vector of a euclidean space or a sphere. Kōdai mathematical seminar reports., 1971, vol. 23, N 1, p. 144-159.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 14 1983

УДК 514.75

Е.П. С о п и н а

О КОНГРУЭНЦИИ ГИПЕРКВАДРИК В A_n С ФОКАЛЬНОЙ КОНГРУЭНЦИЕЙ $(n-2)$-МЕРНЫХ КВАДРИК

В n-мерном пространстве A_n продолжается [1] исследование $(n-1)$-мерных многообразий центральных гиперквадрик. В статье исследуются конгруэнции $\overset{\circ}{V}_{n-1}$ центральных гиперквадрик Q, содержащих в качестве фокального многообразия $(n-2)$-мерную квадрику $\mathcal{K}$. Показано существование двух классов таких конгруэнций со специальными свойствами центров.

Отнесем конгруэнцию $\overset{\circ}{V}_{n-1}$ к реперу $R=\{A,\bar{e}_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma=\overline{1,n})$, где A - центр гиперквадрики Q, векторы $\bar{e}_i$ $(i,j,k=\overline{1,n-1})$ лежат в гиперплоскости $(n-2)$-мерной фокальной квадрики $\mathcal{K}$, вектор $\bar{e}_n$ направлен по направлению, сопряженному векторам $\bar{e}_i$ относительно гиперквадрики Q.

Уравнения гиперквадрики Q и фокальной квадрики $\mathcal{K}$ относительно данного репера запишутся соответственно в виде:

$$Q \equiv a_{ij}x^i x^j + a_{nn}(x^n)^2 - 1 = 0, \tag{1}$$

$$\mathcal{K} \equiv a_{ij}x^i x^j - 1 = 0, \quad x^n = 0. \tag{2}$$

Из того, что каждая точка квадрики $\mathcal{K}$ является фокальной точкой гиперквадрики Q, получаем:

$$dQ\big|_{x^n=0} = \mu\mathcal{K}. \tag{3}$$

Система пфаффовых уравнений конгруэнции $\overset{\circ}{V}_{n-1}$ приводится к виду:

$$\nabla a_{ij} = 0, \quad \omega^i = 0, \tag{4}$$

$$\omega^n = c^i\omega_i, \quad \omega^i_n = p^{ik}\omega_k, \quad da_{nn} - 2a_{nn}\omega^n_n = b^i\omega_i,$$

где формы $\omega_i \overset{def}{=} \omega^n_i$ приняты в качестве базисных.