$$\tilde{a}^i = -a^{bc} b^i_{bc} \tag{4.7}$$

2) Линейные однородные объекты $(a_{ij}, \tilde{b}_k), (a_{bc}, \tilde{b}_a)$, где

$$\tilde{b}_i = b^k_{ik}, \quad \tilde{b}_a = b^k_{ak}. \tag{4.8}$$

Они определяют в пространстве $\mathcal{P}_n$ инвариантные пучки гиперконусов

$$a_{ij} x^i x^j + \frac{2n}{n(m+1)-2} \tilde{b}_i x^i x^0 + \lambda (x^0)^2 = 0, \tag{4.9}$$

$$a_{bc} x^b x^c + \frac{2}{m} \tilde{b}_c x^c x^0 + \mu (x^0)^2 = 0, \tag{4.10}$$

имеющие вершинами соответственно характеристическое и полярное подпространства.

3) Квазитензоры

$$\tilde{b}^i = a^{ik} \tilde{b}_k, \quad \tilde{b}^a = a^{ac} \tilde{b}_c, \tag{4.11}$$

которые определяют инвариантные подпространства

$$x^i + \frac{n}{n(m+1)-2} \tilde{b}^i x^0 = 0, \tag{4.12}$$

$$x^a + \frac{1}{m} \tilde{b}^a x^0 = 0, \tag{4.13}$$

пересекающиеся в единственной инвариантной точке

$$\tilde{B} = \bar{A}_0 - \frac{n}{n(m+1)-2} \tilde{b}^i \bar{A}_i - \frac{1}{m} \tilde{b}^a \bar{A}_a. \tag{4.14}$$

Квадратичный элемент $Q_{n-2} \in \mathcal{K}(n-2, m, n)$ и точка $\tilde{B}$ однозначно определяют в пространстве $\mathcal{P}_n$ невырожденный инвариантный гиперконус второго порядка

$$a_{ij} x^i x^j + a_{bc} x^b x^c + \frac{2}{n(m+1)-2} \tilde{b}_i x^i x^0 + \frac{2}{m} \tilde{b}_a x^a x^0 = 0. \tag{4.15}$$

4) Векторы

$$a^i = \tilde{a}^i - \frac{2(n-m)}{n(m+1)-2} \tilde{b}^i, \quad a_i = a_{ij} a^j, \tag{4.16}$$

определяющие соответственно инвариантную точку

$$\bar{A} = a^i \bar{A}_i \tag{4.17}$$

в полярном подпространстве

$$x^a = 0, \; x^0 = 0 \tag{4.18}$$

и инвариантное $(m-1)$-мерное подпространство

$$a_i x^i = 0, \quad x^a = 0, \quad x^0 = 0 \tag{4.19}$$

– поляру точки A относительно квадрики

$$a_{ij} x^i x^j = 0, \quad x^a = 0, \quad x^0 = 0, \tag{4.20}$$

образованной пересечением квадратичного элемента Q_{n-2} с полярным подпространством.

5) Трижды ковариантный симметрический тензор

$$b_{ijk} = a_{h(i} b^h_{jk)} - \frac{2(n-1)}{n(m+1)-2} \tilde{b}_{(i} a_{jk)}, \tag{4.21}$$

задающий в пространстве $\mathcal{P}_n$ инвариантный $(n-2)$-мерный конус третьего порядка

$$b_{ijk} x^i x^j x^k = 0, \quad x^0 = 0. \tag{4.22}$$

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве // Тр. Томского ун-та. 1963. Т.168. С.28-42.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1969. Т.2. С.179-206.

УДК 514.75

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННЫЕ СЕМЕЙСТВОМ КОЛЛИНЕАЦИЙ

Н.В.М а л а х о в с к и й

(Калининградский государственный университет)

Найден пучок метрических тензоров $\{\overset{\sigma}{g}_{JK}\}$, охватываемых полями фундаментальных объектов n-параметрического семейства Π_n, оснащенных коллинеаций $\pi: \mathcal{P}_n \to P_n$ n-мерных проективных пространств [1]. Рассмотрены римановы пространства, порождаемые тензорами в нормализованном проективном пространстве $\mathcal{P}_n$, и объекты связности Леви-Чивита.

Продолженная система уравнений Пфаффа семейства коллинеаций Π_n имеет вид ([1], (1.6) - (1.9)):

$$\omega^i = \lambda^i_J \Omega^J, \quad \nabla M^i_J = M^i_{JK} \Omega^K, \quad \nabla P_J + \Omega^0_J - M^K_J \omega^0_K = P_{JK} \Omega^K,$$

Зак 1606

$$\nabla\lambda^i_I=\lambda^i_{IK}\Omega^K,\quad \Delta M^i_{IK}=M^i_{IKL}\Omega^L,\quad \Delta\lambda^i_{IK}=\lambda^i_{IKL}\Omega^L, \tag{I}$$

$$\Delta P_{IK}=P_{IKL}\Omega^L,\quad \Delta M^i_{IKL}=M^i_{IKLH}\Omega^H,\quad \Delta P_{IKL}=P_{IKLH}\Omega^H,$$

где $\omega^i \overset{def}{=} \omega^i_0,\ \Omega^I \overset{def}{=} \Omega^I_0;\ i,j,k,I,J,K,L=\overline{1,n}$,

а величины ΔM^i_{IK}, $\Delta\lambda^i_{IK}$, ΔP_{IK}, ΔM^i_{IKL} определяются формулами (I.9) из [1].

Квазитензоры

$$\mu_i=\overset{*}{\tilde\lambda}{}^I_i\left(P_I-\frac{1}{n+1}\overset{*}{M}{}^K_K M^K_{KI}\right), \tag{2}$$

$$\nu_i=\overset{*}{\tilde\lambda}{}^I_i\left(P_I-\frac{1}{n+1}\overset{*}{\lambda}{}^K_K\lambda^K_{KI}\right) \tag{3}$$

определяют пучки инвариантных нормалей $\nu(\sigma)$ и $N(\sigma)$ в пространствах P_n и $\mathcal{P}_n$:

$$(\nu_i+\sigma(\mu_i-\nu_i))\tilde x^i+\tilde x^0=0, \tag{4}$$

$$((\nu_i+\sigma(\mu_i-\nu_i))M^i_I-P_I)\tilde X^I+\tilde X^0=0. \tag{5}$$

Здесь $\overset{*}{\tilde\lambda}{}^I_i$, $\overset{*}{\lambda}{}^K_K$, $\overset{*}{M}{}^K_K$ — тензоры, взаимные тензорам λ^i_K, M^i_K, $\tilde\lambda^i_K=M^i_K-\lambda^i_K$. Нормализованные пространства с нормалями $\nu(\sigma)$ и $N(\sigma)$ назовем соответственно пространствами $\overset{\sigma}{P}_n$ и $\overset{\sigma}{\mathcal{P}}_n$

Рассмотрим систему величин:

$$L_I=\frac{1}{n+1}\left(\overset{*}{M}{}^K_K M^K_{KI}-\overset{*}{\lambda}{}^K_K\lambda^K_{KI}\right). \tag{6}$$

Дифференцируя (6) с использованием (I), находим:

$$\nabla L_I=L_{IK}\Omega^K, \tag{7}$$

где

$$L_{IK}=\frac{1}{n+1}\left(\overset{*}{M}{}^L_{iK}M^i_{LI}+\overset{*}{M}{}^L_i M^i_{LIK}-\overset{*}{\lambda}{}^L_{iK}\lambda^i_{LI}-\overset{*}{\lambda}{}^L_i\lambda^i_{LIK}\right). \tag{8}$$

Следовательно, L_I - тензор. Продолжая уравнение (7), получим:

$$\nabla L_{IK}+L_K\Omega^0_I+L_I\Omega^0_K=L_{IKL}\Omega^L, \tag{9}$$

где величины L_{IKL} - симметричны по индексам K и L.

Поместим вершины A_I репера $\{\bar A_{I'}\}$ на нормаль $N(\sigma)$, а вершины a_i репера $\{\bar a_{i'}\}$ на нормаль $\nu(\sigma)$ $(I',i'=\overline{0,n})$. Построенные частично канонизированные реперы назовем соответственно реперами R_σ и r_σ. Из (4) и (5) следует:

$$\nu_i-\sigma(\mu_i-\nu_i)=0,\quad P_I=0, \tag{10}$$

$$\omega^0_i=\overset{\sigma}{\nu}_{iK}\Omega^K,\quad \Omega^0_I=\overset{\sigma}{N}_{IK}\Omega^K. \tag{11}$$

Учитывая (11) в (9), получим:

$$\nabla \overset{\sigma}{L}_{IK}=\overset{\sigma}{L}_{IKL}\Omega^L, \tag{12}$$

где

$$\overset{\sigma}{L}_{IKL}=L_{IKL}-L_K\overset{\sigma}{N}_{IL}-L_I\overset{\sigma}{N}_{KL}. \tag{13}$$

Обозначим

$$\overset{\sigma}{g}_{IK}=\frac{1}{2}\left(\overset{\sigma}{L}_{IK}+\overset{\sigma}{L}_{KI}\right). \tag{14}$$

Исключая из рассмотрения случай вырождения тензора $\overset{\sigma}{g}_{IK}$, будем считать

$$\det\left(\overset{\sigma}{g}_{IK}\right)\neq 0. \tag{15}$$

Имеем

$$\nabla\overset{\sigma}{g}_{IK}=\overset{\sigma}{g}_{IK,L}\Omega^L, \tag{16}$$

где

$$\overset{\sigma}{g}_{IK,L}=\frac{1}{2}\left(\overset{\sigma}{L}_{IKL}+\overset{\sigma}{L}_{KIL}\right). \tag{17}$$

Получаем пучок римановых многообразий $\overset{\sigma}{M}_n$ с касательными пространствами $\overset{\sigma}{\mathcal{P}}_n$ и метрическими тензорами $\overset{\sigma}{g}_{IK}$.

Обозначим через $\overset{\sigma}{g}{}^{IK}$ приведенные миноры матрицы $(\overset{\sigma}{g}_{IK})$, т.е.

$$\overset{\sigma}{g}{}^{IK}\cdot\overset{\sigma}{g}_{KJ}=\delta^I_J. \tag{18}$$

Объект связности Леви-Чивита $\{\Gamma^L_{IK}\}$ на многообразии $\overset{\sigma}{M}_n$ задается формулой:

$$\Gamma^K_{IJ}=\frac{1}{2}\overset{\sigma}{g}{}^{KL}\left(\overset{\sigma}{g}_{LI,J}+\overset{\sigma}{g}_{LJ,I}-\overset{\sigma}{g}_{IJ,L}\right), \tag{19}$$

а формы связности

$$\tilde\Omega^K_I=\Omega^K_I-\Gamma^K_{IL}\Omega^L \tag{20}$$

удовлетворяют уравнениям структуры

$$d\Omega^I=\Omega^K\wedge\tilde\Omega^I_K,\quad d\tilde\Omega^K_I=\tilde\Omega^L_I\wedge\tilde\Omega^K_L+\frac{1}{2}R^K_{ILH}\Omega^L\wedge\Omega^H, \tag{21}$$

где тензор кривизны R^K_{ILH} определяется дифференцированием соотношений (19), (20).

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й Н.В. О семействах коллинеаций многомерных проективных пространств // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Вып.20. С.50-57.

2. М а л а х о в с к и й Н.В. Нормализации проективных пространств и характеристические числа, порожденные семейством коллинеаций // Там же, 1990. Вып.21. С.50-56.