

А. С. Кочина, М. Н. Протасевич, В. И. Семенов

**ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ИТЕРАЦИЙ
НЕКОТОРЫХ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ
НА ПРОСТЕЙШИЕ КРИВЫЕ**

Ставится задача рассмотреть воздействие последовательных итераций конформного отображения вида $w: z \rightarrow z^2 + c$ на некоторые замкнутые и незамкнутые линии. Поскольку аналитическое описание уравнений образов при некоторых конформных отображениях является достаточно сложной задачей, для реализации итерационного процесса, построения и описания образов удобно пользоваться системой компьютерной алгебры Maple.

The problem of transformation of some elementary closed and non-closed curves by means of successive iterations of conformal mapping $w: z \rightarrow z^2 + c$ is considered. Since the analytical description of the equations of images for some conformal mappings is quite complicated, it is convenient to use the Maple computer algebra system to implement the iterative process.

Ключевые слова: комплексная функция, конформные отображения, образы окружностей, замечательные кривые.

Keywords: complex function, conformal mappings, images of circle, remarkable curves.

Рассмотрим отображение $w = z^2$. Заметим, что область сжатия этого отображения представляет собой множество $|z| \leq \frac{1}{2}$. Для исследования воздействия этого отображения на разные объекты удобно представить его в полярной системе координат:

$$w_1 = r^2 e^{2\varphi i}.$$

Точки образа после первого воздействия будут иметь вид

$$\rho_1 = r^2, \varphi_1 = 2\varphi.$$

Под первой итерацией будем понимать воздействие рассматриваемого отображения на некоторый прообраз (множество точек комплексной плоскости). Под второй итерацией — воздействие того же отображения на образ первой итерации. И далее, под n -й итерацией будем понимать воздействие этого отображения на образ $(n - 1)$ -й итерации.

В качестве прообраза рассмотрим окружность

$$r = a \cos \varphi, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Образом этой окружности при первой итерации будет являться некоторая кривая, выражаемая уравнениями вида

$$\rho_1 = (a \cos \varphi)^2, \varphi_1 = 2\varphi$$



или, что то же,

$$\rho_1 = \left(\operatorname{acos} \frac{\varphi_1}{2}\right)^2, \varphi_1 \in [0; 2\pi].$$

Из вида этого уравнения следует, что полученная кривая является кардиоидой. Снова применяя отображение $w = z^2$, получим результат второй итерации:

$$\rho_2 = \left(\operatorname{acos} \frac{\varphi_1}{2}\right)^4, \varphi_2 = 2\varphi_1$$

или

$$\rho_2 = \left(\operatorname{acos} \frac{\varphi_2}{4}\right)^4, \varphi_2 \in [0; 4\pi].$$

Полученная таким образом кривая является кривой более высокого порядка и имеет точку самопересечения.

Применяя отображение последовательно n раз и обобщая итерационный процесс, получим в результате следующее семейство кривых:

$$\rho_n = \left(\operatorname{acos} \frac{\varphi_n}{2^n}\right)^{2^n}, \varphi_n \in [0; 2^n\pi].$$

Каждая кривая этого семейства имеет $n - 1$ точек самопересечения. Результаты рассмотренных итераций представлены на рисунке 1.

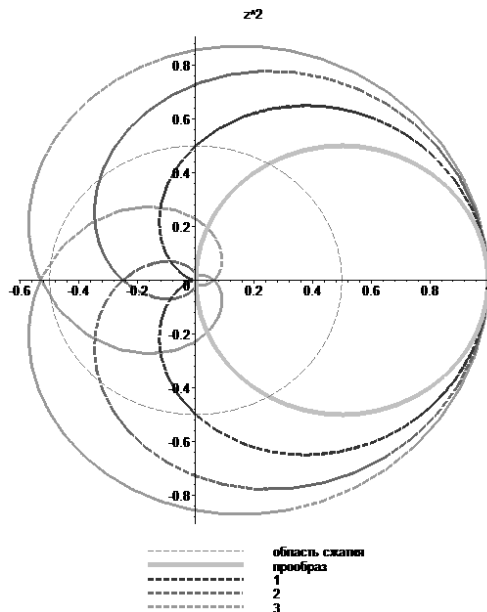


Рис. 1. Образы кривой $r = \cos\varphi$ при последовательном применении отображения $w = z^2$

По рисунку 1 можно заметить, что пределом рассмотренного итерационного процесса является начало координат. Неподвижной точкой остается точка $(1,0)$.

Если же в качестве прообраза взять окружность, которая находится внутри области сжатия отображения и проходит через точку $(0,0)$, то и все последующие образы будут находиться внутри этой области, причем точки самопересечения стремятся к точке $(0,0)$ достаточно быстро (рис. 2, а). Увеличенный образ второй и третьей итераций представлен на рисунке 2, б.

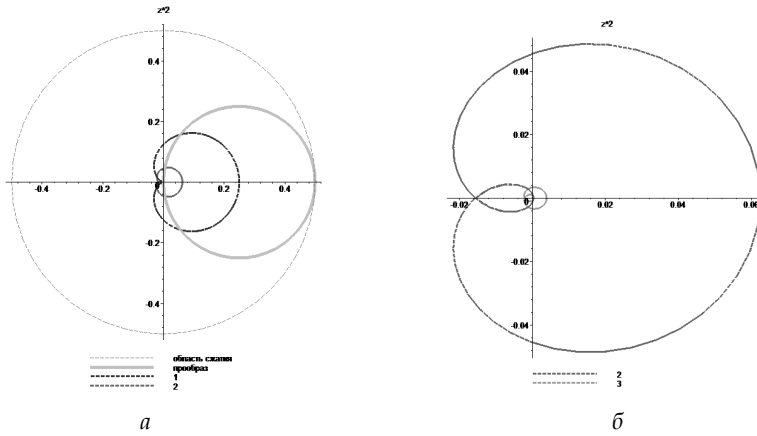


Рис. 2. Образы кривой $r = a \cos \varphi$ для $a < 0,5$ при последовательном применении отображения $w = z^2$:
 а – 1-я и 2-я итерации; б – 2-я и 3-я итерации

Иначе дело обстоит с отображением $w = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$. В качестве прообразов рассмотрим те же самые окружности.

Получаемые в результате последовательных итераций кривые довольно сложно описать аналитически. Результаты первой и второй итераций имеют вид

$$w_1 = r^2 e^{2\varphi i} + c,$$

$$w_2 = w_1^2 + c = (r^2 e^{2\varphi i} + c)^2 + c = r^4 e^{4\varphi i} + 2r^2 e^{2\varphi i} + c^2 + c.$$

Интересные образы (рис. 3) получаются в результате воздействия отображения $w = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$ на окружность $r = \frac{1}{2} \cos \varphi$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ при $c = \frac{1}{4}$.

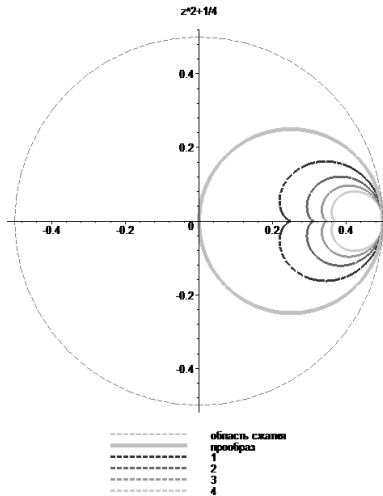


Рис. 3. Образы кривой $r = \frac{1}{2} \cos \varphi$ при последовательном применении отображения $w = z^2 + \frac{1}{4}$



Можно заметить, что в этом случае точек самопересечения у образов не наблюдается и получается семейство соприкасающихся кардиоид с общей точкой $(\frac{1}{2}, 0)$, которая является неподвижной точкой данного отображения.

Совсем иной результат возникает в случае отображения вида $w = z^2 + \frac{1}{4}i$. Если его последовательно применять к окружности $r = \frac{1}{2} \cos \varphi, \varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, которая полностью находится в области сжатия этого отображения, то мы снова получим семейство кардиоид, которые в процессе итераций уменьшаются и сходятся к некоторой точке (рис. 4).

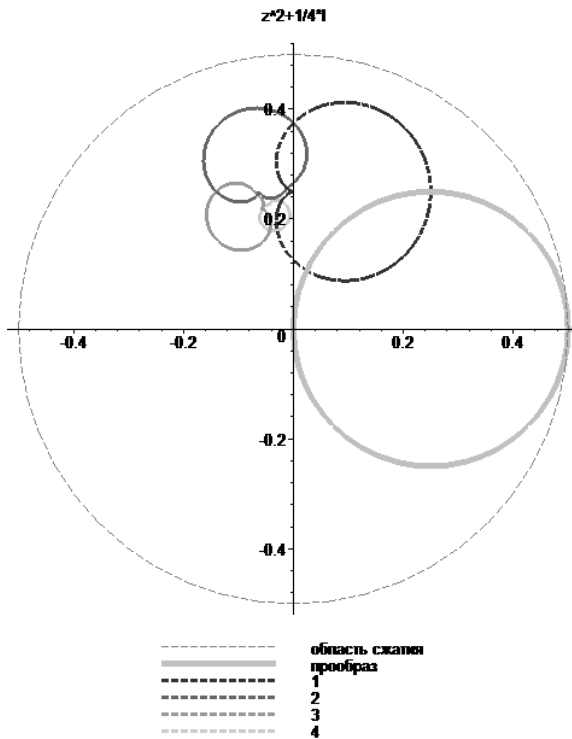


Рис. 4. Образы кривой $r = \frac{1}{2} \cos \varphi$ при последовательном применении отображения $w = z^2 + \frac{1}{4}i$

Интересный результат дает отображение $w = z^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$. В качестве образа берется все та же окружность, входящая в область сжатия. Результат последовательных пяти итераций представлен на рисунке 5.

Во всех предыдущих случаях в качестве прообраза использовалась замкнутая линия. Мы видим, что при многократном применении отображения вида $w = z^2 + c, c \in \mathbb{C}$ с различными значениями параметра c получаются весьма разные и неожиданные результаты, но образами замкнутых линий при всех итерациях также являются замкнутые линии.

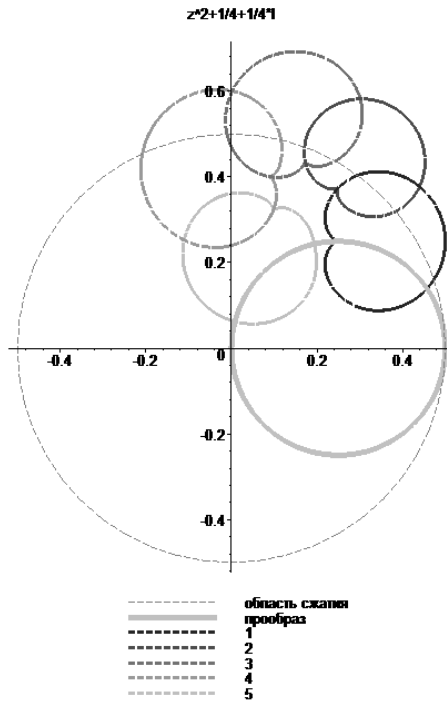


Рис. 5. Образы кривой $r = \frac{1}{2} \cos \varphi$ при последовательном применении отображения $w = z^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

Рассмотрим пример воздействия отображения $w = z^2$ на отрезок $x + y = a$, который удобно задавать в полярной системе координат:

$$r = \frac{a}{\sin \varphi + \cos \varphi}, \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Множество точек данного отрезка можно представить в комплексном виде:

$$z = \frac{ae^{\varphi i}}{\sin \varphi + \cos \varphi}, \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Результатом первой итерации будет являться часть параболы:

$$w_1 = z^2 = \left(\frac{ae^{\varphi i}}{\sin \varphi + \cos \varphi}\right)^2 = \frac{a^2 e^{2\varphi i}}{2\sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}, \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

В полярной системе координат уравнение полученной кривой имеет вид

$$\rho_1 = \frac{a^2}{2\sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)}, \varphi_1 = 2\varphi.$$

Выразив φ через φ_1 , получим уравнение параболы:

$$\rho_1 = \frac{a^2}{2\sin^2\left(\frac{\varphi_1 + \pi}{4}\right)}, \varphi_1 \in [0; \pi].$$



Обобщая итерационный процесс, через n итераций получим следующую кривую:

$$\rho_n = \frac{a^{2^n}}{2^n \sin^{2^n} \left(\frac{\varphi_n + \pi}{2^n + 4} \right)}, \varphi_n \in [0; 2^{n-1}\pi].$$

Линии полученного семейства являются замкнутыми и имеют $n - 2$ точек самопересечения. Образы этих линий можно видеть на рисунке 6.

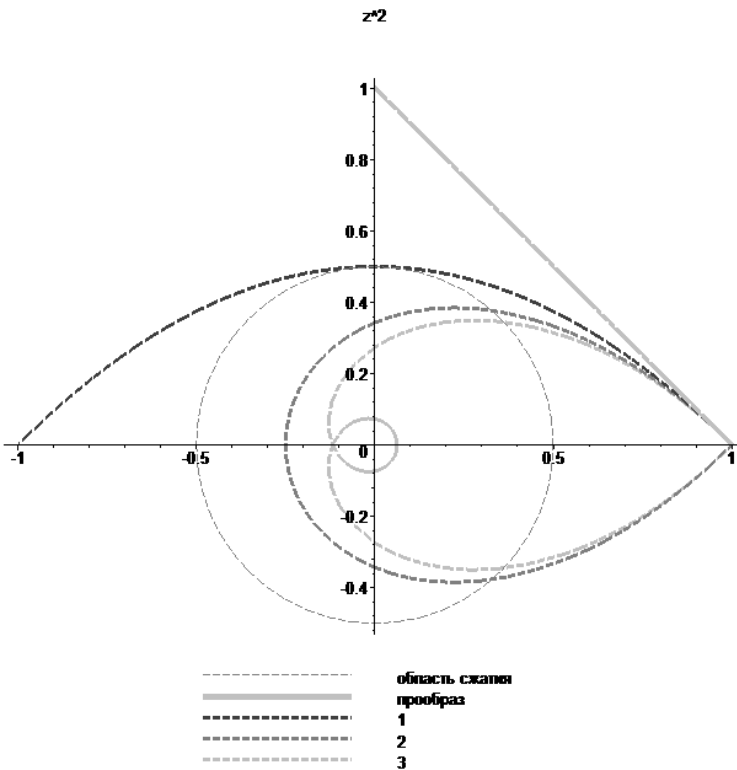


Рис. 6. Образы отрезка $x + y = a$, $0 \leq x \leq a$ при последовательном применении отображения $w = z^2$

Не менее интересен пример воздействия отображения $w = z^2$ на астроиду, которая представляет собой замкнутую негладкую кривую и может быть выражена уравнением

$$z = a \cos^3 t + i \cdot a \sin^3 t, t \in [0; 2\pi].$$

Аналитическое представление образов этой кривой при данной деформации имеет очень громоздкий вид, однако результат визуализации образов астроида при соответствующих итерациях позволяет судить о гладкости полученных линий кроме неподвижной точки $(1,0)$ данного отображения. Полученный результат представлен на рисунках 7, а, б.

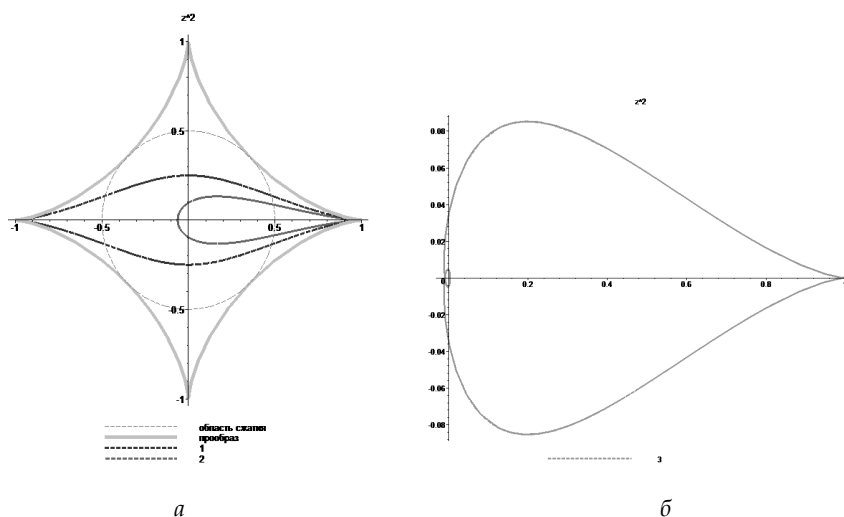


Рис. 7. Образы астроида $z = a\cos^3 t + i \cdot a\sin^3 t, t \in [0; 2\pi]$ при последовательном применении отображения $w = z^2$:
 а – 1-я и 2-я итерации; б – 3-я итерация

Анализ рассмотренных примеров показывает, что линии образов при последовательных конформных отображениях можно классифицировать как отдельные типы линий, которые зависят от комплексного параметра c и исходных прообразов. Для дальнейших исследований интерес представляют вопросы о воздействии других конформных преобразований на более сложные линии и классификации линий на плоскости, которые при данных конкретных конформных преобразованиях переходят в линии одинакового типа.

Список литературы

1. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. М., 2003.
2. Клочко Т.В., Парфенова Н.Д. Решение задач комплексного анализа средствами MAPLE. Харьков, 2009.
3. Кочина А.С. Замечательные кривые как образы окружностей и прямых при конформных отображениях / Диф. геом. многообр. фигур : междуз. темат. сб. науч. тр. Калининград, 2018. Вып. 49. С. 101 – 106.

Об авторах

Александра Сергеевна Кочина – ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.
 E-mail: a_kochina@mail.ru

Михаил Николаевич Протасевич – ст. преп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.
 E-mail: no_solution@mail.ru



Владимир Иосифович Семенов – д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.
E-mail: VLSemenov@kantiana.ru

The authors

Alexandra S. Kochina, Assistant Professor, I. Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: a_kochina@mail.ru

Mikhail N. Protasevich, Assistant Professor, I. Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: no_solution@mail.ru

Prof. Vladimir I. Semenov, I. Kant Baltic Federal University, Russia.
E-mail: VLSemenov@kantiana.ru