$$C_s^m R_{jmk}^i + C_k^m R_{jsm}^i + C_j^m R_{msk}^i = 0\,,\ C_m^i R_{kjs}^m + C_s^m R_{kjm}^i = G_m^i R_{kjs}^m\,,$$
$$\nabla_k P_j^i + \nabla_j P_k^i = -\nabla_j \nabla_k X^i + X^m R_{kjm}^i\,,\ \nabla_k P_j^i = \nabla_k K_j^i\,.$$

Нетрудно показать, что данное разложение единственно.

Список литературы

1. *Осьминина Н.А.* О некоторых лифтах касательного расслоения второго порядка со связностью полного лифта // Движения в обобщенных пространствах: Межвуз. сб. науч. тр. Пенза, 1999.

N.A. Osminina

ABOUT CANION DISTRIBUNION FREE INFINITESIMAL PROJECT TRANSFORMATION TANGENT BUNDLES 2-ORDER WITH CONNECTION OF COMPLETE LIFT

It is got canion distribution free infinitesimal project transformation tangent bundles 2-order with connection of complete lift.

УДК 514.75

К.В. Полякова

(Калининградский государственный университет)

ТЕНЗОР ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И АБСОЛЮТНЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ

Многомерная поверхность проективного пространства рассмотрена как многообразие касательных плоскостей. Произведена нормализация 2-го рода Нордена. Внесением в дифференциальные уравнения для нормализующего квазитензора λ форм коаффинной связности получены ковариантный дифференциал и ковариантные производные квазитензора λ относительно коаффинной связности. Найдено выражение для внешнего дифференциала от ковариантного дифференциала λ. Линейные комбинации компонент объекта коаффинной кривизны, стоящие при внешних произведениях базисных форм в полученных выражениях, образуют тензор, названный тензором параллельности. Его обращение в нуль имеет инвариантный смысл, состоящий в том, что параллельное перенесение нормали 2-го рода является абсолютным, т.е. осуществляется при ее смещении вдоль всей поверхности. И обратно, если параллельное перенесение нормали 2-го рода в коаффинной связности реализуется вдоль всей поверхности, то ковариантные производные компонент λ равны нулю относительно этой связности. Следо-

вательно, ковариантные дифференциалы могут быть равны нулю не только вдоль некоторых линий, а на всей поверхности. Дифференцированием этих равенств получены равные нулю внешние произведения базисных форм с коэффициентами – компонентами тензора параллельности, поэтому тензор параллельности обращается в нуль. Таким образом, параллельные перенесения нормали 2-го рода Нордена тогда и только тогда являются абсолютными, когда тензор параллельности равен нулю.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $R=\{A,A_I\}$, деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA=\theta A+\omega^I A_I,\ dA_I=\theta A_I+\omega_I A+\omega_I^J A_J\ (I,...=1,...,n).$$

Структурные формы $\omega^I, \omega_I, \omega_I^J$ проективной группы GP(n), действующей в пространстве P_n, удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$D\omega^I=\omega^J\wedge\omega_J^I,\ D\omega_I=\omega_I^J\wedge\omega_J,$$
$$D\omega_J^I=\omega_J\wedge\omega^I+\omega_J^K\wedge\omega_K^I+\delta_J^I\omega_K\wedge\omega^K. \tag{1}$$

В проективном пространстве P_n рассмотрим m-поверхность X_m $(1\le m<n)$ как семейство центрированных касательных плоскостей T_m. Осуществим специализацию подвижного репера R, помещая его вершины A, A_i в касательную плоскость T_m, причем A в ее центр. Уравнения поверхности X_m в полученном репере имеют вид:

$$\omega^a=0,\ \omega_i^a=\Lambda_{ij}^a\omega^j\ (\Lambda_{ij}^a=\Lambda_{ji}^a), \tag{2}$$

где i,...=1,...,m; a,...=m+1,...,n. Продолжая 2-ю подсистему системы (2), найдем

$$\Delta\Lambda_{ij}^a=\Lambda_{ijk}^a\,\omega^k.$$

Дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda_{ij}^a=d\Lambda_{ij}^a+\Lambda_{ij}^b\omega_b^a-\Lambda_{kj}^a\omega_i^k-\Lambda_{ik}^a\omega_j^k.$$

Из структурных уравнений (1) группы GP(n) и уравнений (2) поверхности X_m следует, что с последней ассоциируется главное расслоение $A^*(X_m)$ коаффинных (центропроективных) реперов, типовой слой которого – коаффинная (центропроективная) группа $A^*=GA^*(m)$, действующая в центрированной касательной плоскости T_m. Структурные уравнения этого расслоения имеют вид:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \tag{3}$$

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}, \tag{4}$$

$$D\omega_i = \omega^j_i \wedge \omega_j + \omega^j \wedge \omega_{ij},$$

где введены обозначения

$$\omega^i_{jk} = \Lambda^a_{jk}\omega^i_a - \delta^i_j\omega_k - \delta^i_k\omega_j, \ \omega_{ij} = \Lambda^a_{ij}\,\omega_a.$$

Ассоциированное расслоение $A^*(X_m)$ содержит в качестве подрасслоения расслоение касательных линейных реперов $L(X_m)$ со структурными уравнениями (3,4) и типовым слоем – линейной группой $L=GL(m)\subset A^*$, действующей в связке касательных прямых.

Зададим связность в главном расслоении $A^*(X_m)$ способом Лаптева. Введем в рассмотрение новые слоевые формы

$$\tilde{\omega}^i_j = \boxed{\phantom{\omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k}}, \ \tilde{\omega}_i = \omega_i - \Gamma_{ij}\omega^j,$$

являющиеся формами фундаментально-групповой связности в главном расслоении $A^*(X_m)$, тогда компоненты объекта $\Gamma=\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}\}$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\,\omega^l, \ \Delta\Gamma_{ij} + \Gamma^k_{ij}\omega_k + \omega_{ij} = \Gamma_{ijk}\,\omega^k.$$

Объект Γ называется объектом коаффинной (центропроективной) связности. Из определяющих его дифференциальных уравнений следует, что он содержит подобъект касательной линейной связности Γ^i_{jk}, задающий связность в расслоении касательных линейных реперов $L(X_m)$.

Структурные уравнения форм связности запишем в виде:

$$D\tilde{\omega}^i_j = \boxed{} \wedge \tilde{\omega}^i_k + R^i_{jkl}\,\omega^k \wedge \omega^l, \ D\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}^j_i \wedge \tilde{\omega}_j + R_{ijk}\,\omega^j \wedge \omega^k.$$

Компоненты объекта кривизны $R=\{R^i_{jkl}, R_{ijk}\}$ связности Γ выражаются по формулам

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{|s|l]}, \ R_{ijk} = \Gamma_{i[jk]} - \Gamma^l_{i[j}\Gamma_{|l|k]},$$

т.е. являются антисимметричными по двум последним индексам. Они удовлетворяют сравнениям

$$\Delta R^i_{jkl} \equiv 0, \ \Delta R_{ijk} + R^l_{ijk}\omega_l \equiv 0$$

по модулю базисных форм ω^i.

Теорема 1. *Объект центропроективной кривизны* R *является тензором и содержит подтензор касательной линейной кривизны* R^i_{jkl}.

Произведем нормализацию 2-го рода Нордена поверхности X_m, которая заключается в присоединении к каждой точке поверхности (m-1)-мерной плоскости N_{m-1} ($N_{m-1}\oplus A=T_m$), которую зададим совокупностью точек $B_i=A_i+\lambda_i A$, причем

$$\Delta\lambda_i+\omega_i=\lambda_{ij}\omega^j. \tag{5}$$

Внося в уравнения (6) формы коаффинной связности Г, получим

$$\nabla\lambda_i=\nabla_j\lambda_i\omega^j. \tag{6}$$

Выражение

$$\nabla\lambda_i=d\lambda_i-\lambda_j\tilde{\omega}_i^j+\tilde{\omega}_j \tag{7}$$

называется ковариантным дифференциалом, а выражения

$$\nabla_j\lambda_i=\lambda_{ij}+\lambda_k\Gamma^k_{ij}-\Gamma_{ij}$$

ковариантными производными квазитензора λ_i относительно коаффинной связности Г.

Внешний дифференциал от ковариантного дифференциала (7) имеет вид:

$$D\nabla\lambda_i=-\nabla\lambda_j\wedge\tilde{\omega}_i^j+M_{ijk}\omega^j\wedge\omega^k, \tag{8}$$

где

$$M_{ijk}=R_{ijk}-\boxed{\quad}.$$

Объект M_{ijk} является антисимметричным по двум последним индексам и удовлетворяет сравнению

$$\Delta M_{ijk}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,\omega^i).$$

Зададим линию $\rho\subset X_m$ уравнениями $\omega^i=\rho^i\omega$. Тогда из (8) следует, что система дифференциальных уравнений $\nabla\lambda_i=0$ вполне интегрируема вдоль линии $\rho\subset X_m$.

Объект M_{ijk} является тензором, поэтому обращение его в нуль имеет инвариантный смысл. Выясним его. Уравнения (8) примут вид:

$$D\nabla\lambda_i=-\nabla\lambda_j\wedge\tilde{\omega}_i^j,$$

а система уравнений $\nabla\lambda_i=0$ станет вполне интегрируемой вдоль поверхности X_m. В этом случае будем говорить об абсолютном параллельном перенесении нормали 2-го рода Нордена N_{m-1}. Назовем объект M_{ijk} тензором параллельности. Таким образом, если компоненты объекта кривизны групповой связности удовлетворяют соотношениям $M_{ijk}=0$, то параллельное перенесение, задаваемое системой $\nabla\lambda_i=0$, является абсолютным в коаффинной связности.

И обратно, если параллельное перенесение нормали 2-го рода, задаваемое системой $\nabla\lambda_i=0$, абсолютное, то компоненты кривизны коаффинной связности удовлетворяет соотношениям $M_{ijk}=0$. Покажем это. Пусть указанное параллельное перенесение абсолютное, тогда ковариантные производные $\nabla_j\lambda_i$ обращаются в нуль. Дифференциальные уравнения (6) принимают вид:

$$d\lambda_i - \lambda_j \varpi_i^j + \varpi_j = 0, \tag{9}$$

Следовательно, объект λ_i является инвариантным относительно связности Г. Дифференцируя уравнения (9), получим

$$M_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k = 0,$$

или $M_{i[jk]}=0$, а в силу антисимметричности объекта M_{ijk} следует, что $M_{ijk}=0$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Чтобы параллельное перенесение нормали 2-го рода в коаффинной связности, заданное системой* $\nabla\lambda_i=0$, *являлось абсолютным необходимо и достаточно обращение в нуль тензора параллельности* M_{ijk}.

K.V. Polyakova

PARALLELISM TENSOR AND ABSOLUTE PARALLEL DISPLACEMENTS

Many dimensional surface in the projective space is considered as tangent planes manifold. Norden's normalization of the 2-nd kind is made. Covariant differential and covariant derivatives are obtained by means of bringing in differential equation for normalizing quasitensor components the coaffine connection form. The expession of exterior differential for covariant differential is found. Linear combinations for components of coaffine curvature object, turning up under the exterior products of base forms in the obtained expression, are tensor, called parallelism tensor. It is proved, the normal of the 2-nd kind parallel displacements are absolute if and only if parallelism tensor vanishes.

УДК 514.75