S. Stepanov, I. Shandra

HARMONIOUSLY FLAT RIEMANNIAN MANIFOLDS

A harmoniously flat manifold is a Riemannian manifold admitting a harmonic diffeomorphism onto Euclidian space. Using the representations theory of groups, we have defined in an intrinsic way seven classes of harmonic diffeomorphisms (see *Mathematical notes*, Vol. 74, No. 5, 2003, pp. 708—716). In this paper, we define seven classes of harmoniously flat Riemannian manifolds on the basis of this classification. We also partly describe the geometry of three classes of these manifolds. The paper is based on the talk given at an International conference on differential equations and dynamical systems (Suzdal, 10—15 July 2006 y.).

УДК 514.756.2

А. В. Столяров

(Чувашский государственный педагогический университет)

ОБОБЩЕННО СОПРЯЖЕННЫЕ АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ НЕВЫРОЖДЕННОЙ НОРМАЛИЗАЦИЕЙ КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

Показано, что: 1) невырожденная нормализация $A_0 \to X_{n+1}$ конформного пространства C_n индуцирует две аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ без кручения, обобщенно сопряженные относительно поля ее основного тензора; 2) связность $\overset{2}{\nabla}$ совпадает с аффинной связностью $\tilde{\nabla}$ без кручения, индуцируемой нормализацией $X_{n+1} \to A_0$ пространства C_n.

Индексы принимают следующие значения:

$$\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1}; \ i, j, k, l, s, t = \overline{1, n}.$$

1. Рассмотрим конформное (псевдоконформное индекса $l \neq 0$ или собственно конформное, $l = 0$) пространство C_n, $n \geq 2$ [1; 7]; отнесем его к подвижному полуизотропному [2] реперу $R = \{A_\lambda\}$, состоящему из точек A_0, A_{n+1} и n гиперсфер A_i, проходящих через эти точки. Если скалярные произведения $(A_\lambda A_\mu)$ элементов выбранного репера обозначить через $g_{\lambda\mu}$, то [1; 7]

$$\|g_{\lambda\mu}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{ij} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \ g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}.$$

Группа конформных преобразований L пространства C_n изоморфна подгруппе группы проективных преобразований проективного пространства P_{n+1}, а именно изоморфна стационарной подгруппе гиперквадрики Дарбу $Q_n^2 \subset P_{n+1}$ овального типа, на которую при перенесении Дарбу [1; 7] отображаются все точки конформного пространства C_n:

$$Q_n^2 : g_{ij} x^i x^j + 2x^0 x^{n+1} = 0;$$

эта подгруппа зависит от $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ независимых параметров.

Инфинитезимальные перемещения репера R определяются уравнениями $dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu$, где дифференциальные формы Пфаффа ω_λ^μ удовлетворяют структурным уравнениям $D\omega_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\rho \wedge \omega_\rho^\mu$; кроме того, формы ω_λ^μ удовлетворяют линейным зависимостям [1; 7]:

$$\omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = \omega_0^0 + \omega_{n+1}^{n+1} = 0, \omega_i^0 + g_{ik}\omega_{n+1}^k = 0,$$
$$\omega_i^{n+1} + g_{ik}\omega_0^k = 0, \; dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 0. \quad (1)$$

В силу овальности гиперквадрики Q_n^2 тензор g_{ij} невырожден:

$$g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j, dg^{ij} + g^{ik}\omega_k^j + g^{kj}\omega_k^i = 0.$$

2. Пространство С*n* называется нормализованным [5], если в нем задано дифференцируемое точечное соответствие $A_0 \to X_{n+1}$ (A_0 – нормализуемая точка, X_{n+1} – нормализующая точка пространства С*n*, $X_{n+1} \neq A_0$). Нормализация пространства С*n* равносильна тому, что к каждой точке $A_0 \in$ С*n* присоединены *n* гиперсфер

$$P_i = A_i + x_i^0 A_0, (P_i A_0) = (P_i X_{n+1}) = 0. \quad (2)$$

В силу этого точка X_{n+1} имеет разложение [1; 7]:

$$X_{n+1} = -\tfrac{1}{2} g^{ij} x_i^0 x_j^0 A_0 - g^{ij} x_i^0 A_j + A_{n+1}, \quad (3)$$

где

$$\nabla x_i^0 + \omega_i^0 = x_{ik}^0 \omega_0^k. \quad (4)$$

Таким образом, нормализация пространства С*n* эквивалентна заданию поля квазитензора x_i^0.

Система функций

$$a_{ij}^0 \overset{def}{=} x_{ij}^0 - x_i^0 x_j^0 + \tfrac{1}{2} g_{ij} g^{st} x_s^0 x_t^0$$

образует тензор (вообще говоря, несимметричный):

$$\nabla a_{ij}^0 + a_{ij}^0 \omega_0^0 = a_{ijk}^0 \omega_0^k. \quad (5)$$

В случае симметрии тензора a_{ij}^0 нормализация С*n* по аналогии с нормализацией проективного пространства [5] называется [6] гармонической.

Предположим, что нормализация пространства C_n является невырожденной, то есть тензор a^0_{ij} невырожден:

$$\begin{gathered} a^{ik}_0 a^0_{kj} = a^{ki}_0 a^0_{jk} = \delta^i_j, \\ da^{ij}_0 - 2a^{ij}_0 \omega^0_0 + a^{ik}_0 \omega^j_k + a^{kj}_0 \omega^i_k = -a^{ik}_0 a^{sj}_0 a^0_{kst} \omega^t_0. \end{gathered} \tag{6}$$

3. Возьмем систему форм

$$\begin{cases} \overset{1}{\theta}{}^j_0 = \omega^j_0, \\ \overset{1}{\theta}{}^j_i = \omega^j_i - \delta^j_i (\omega^0_0 - x^0_k \omega^k_0) + g^{jk} x^0_k \omega^{n+1}_i + x^0_i \omega^j_0. \end{cases} \tag{7}$$

Эта система удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева [3; 4]

$$D\overset{1}{\theta}{}^j_0 = \overset{1}{\theta}{}^k_0 \wedge \overset{1}{\theta}{}^j_k, \quad D\overset{1}{\theta}{}^j_i = \overset{1}{\theta}{}^k_i \wedge \overset{1}{\theta}{}^j_k + \tfrac{1}{2} \overset{1}{r}{}^j_{ist}\, \omega^s_0 \wedge \omega^t_0, \tag{8}$$

а следовательно, определяет пространство аффинной связности без кручения $\overset{1}{A}_{n,n}$; тензор кривизны этого пространства имеет строение

$$\overset{1}{r}{}^j_{ist} = 2\left(a^0_{i[s} \delta^j_{t]} - g^{jk} a^0_{k[s} g_{t]i} - \delta^j_i a^0_{[st]}\right). \tag{9}$$

Согласно работе [6] пространство $\overset{1}{A}_{n,n}$ является вейлевым с полем метрического тензора g_{ij}; это пространство бывает римановым тогда и только тогда, когда нормализация пространства C_n — гармоническая.

Уравнения (5) в силу (7) можно записать в виде:

$$da^0_{ij} - a^0_{ik} \overset{1}{\theta}{}^k_j - a^0_{kj} \overset{1}{\theta}{}^k_i = A^0_{ijk} \omega^k_0, \tag{10}$$

где тензор A^0_{ijk} имеет строение

$$A^0_{ijk} = a^0_{ijk} - a^0_{ik} x^0_j - a^0_{kj} x^0_i - 2a^0_{ij} x^0_k + (g_{ik} a^0_{lj} + g_{jk} a^0_{il}) g^{lt} x^0_t. \tag{11}$$

4. Возьмем систему форм $\left\{ \overset{2}{\theta}{}_0^j, \overset{2}{\theta}{}_i^j \right\}$, где

$$\overset{2}{\theta}{}_0^j = \overset{1}{\theta}{}_0^j, \overset{2}{\theta}{}_i^j = \overset{1}{\theta}{}_i^j + a_0^{jl} \mathrm{A}_{lik}^0 \omega_0^k; \tag{12}$$

эта система удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева

$$D\overset{2}{\theta}{}_0^j = \overset{2}{\theta}{}_0^k \wedge \overset{2}{\theta}{}_k^j, \;\; D\overset{2}{\theta}{}_i^j = \overset{2}{\theta}{}_i^k \wedge \overset{2}{\theta}{}_k^j + \tfrac{1}{2} \overset{2}{r}{}_{ist}^j \, \omega_0^s \wedge \omega_0^t; \tag{13}$$

следовательно, система форм (12) определяет пространство аффинной связности без кручения $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$.

Уравнения (10) в силу (12) можно записать в виде:

$$da_{ij}^0 - a_{ik}^0 \, \overset{2}{\theta}{}_j^k - a_{kj}^0 \, \overset{1}{\theta}{}_i^k = 0. \tag{14}$$

Последние уравнения доказывают следующее предложение:

Теорема 1. *Аффинные связности* $\overset{1}{\nabla}$ *и* $\overset{2}{\nabla}$ *без кручения, индуцируемые невырожденной нормализацией конформного пространства* C_n*, обобщенно сопряжены [5] относительно поля основного тензора* a_{ij}^0 *нормализации, причем в случае ее гармоничности (т. е.* $a_{[ij]}^0 = 0$*) средняя связность* $\overset{0}{\nabla}$*, определяемая системой форм* $\left\{ \omega_0^j, \tfrac{1}{2}\left(\overset{1}{\theta}{}_i^j + \overset{2}{\theta}{}_i^j \right) \right\}$*, является вейлевой с полем метрического тензора* a_{ij}^0*.*

Компоненты тензора кривизны пространства аффинной связности $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$ имеют строение

$$\overset{2}{r}{}_{ist}^j = -a_{ki}^0 a_0^{jl} \, \overset{1}{r}{}_{lst}^k; \tag{15}$$

докажем это. Замкнем уравнения (14); с использованием (8) и (13) имеем: $\left(a_{ik}^0 \overset{2}{r}{}_{jst}^k + a_{kj}^0 \overset{1}{r}{}_{ist}^k\right)\omega_0^s \wedge \omega_0^t = 0$. Из последних квадратичных уравнений непосредственно получим (15).

5. Найдем геометрическую трактовку аффинной связности $\overset{2}{\nabla}$ пространства $\overset{2}{\mathrm{A}}_{n,n}$. Из соотношений (2), (3) с использованием (1), (4) находим

$$dP_i = a_{ik}^0 \omega_0^k A_0 - g_{ik}\omega_0^k X_{n+1} + \left(\omega_i^k + x_i^0 \omega_0^k + g^{lk} x_l^0 \omega_i^{n+1}\right)P_k,$$
$$dX_{n+1} = \left(x_k^0 \omega_0^k - \omega_0^0\right)X_{n+1} - g^{lk} a_{ls}^0 \omega_0^s P_k. \qquad (16)$$

Возьмем полуизотропные конформные реперы $R = \{A_\lambda\}$ и $\tilde{R} = \{B_\lambda\}$, где $B_0 \equiv X_{n+1}, B_i \equiv P_i, B_{n+1} \equiv A_0$; эти реперы связаны соответственно с нормализуемой точкой A_0 и нормализующей точкой X_{n+1}. Если инфинитезимальные перемещения этих реперов определяются уравнениями $dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu$, $dB_\lambda = \tilde{\omega}_\lambda^\mu B_\mu$, то согласно (16) находим

$$\tilde{\omega}_{n+1}^j = \omega_0^j,\ \tilde{\omega}_0^j = -g^{jk} a_{ks}^0 \omega_0^s,\ \tilde{\omega}_0^0 = x_k^0 \omega_0^k - \omega_0^0,\ \tilde{\omega}_{n+1}^{n+1} = \omega_0^0 - x_k^0 \omega_0^k,$$
$$\tilde{\omega}_i^0 = -g_{ik}\omega_0^k,\ \tilde{\omega}_i^{n+1} = a_{ik}^0 \omega_0^k,\ \tilde{\omega}_i^j = \omega_i^j + x_i^0 \omega_0^j + g^{kj} x_k^0 \omega_i^{n+1}. \qquad (17)$$

Так как нормализация конформного пространства C_n полем квазитензора x_i^0 равносильна заданию в нем дифференцируемого точечного соответствия $A_0 \to X_{n+1}$, то в случае ее невырожденности дифференцируемое точечное соответствие $X_{n+1} \to A_0$ также определяет нормализацию исходного пространства C_n. Следовательно, при этой нормализации индуцируется аффинная связность $\tilde{\nabla}$ без кручения, определяемая системой форм (ср. с (7))

$$\tilde{\theta}_0^j = \tilde{\omega}_0^j,$$
$$\tilde{\theta}_i^j = \tilde{\omega}_i^j = \delta_i^j\left(\tilde{\omega}_0^0 - \tilde{x}_k^0 \tilde{\omega}_0^k\right) + g^{jk}\tilde{x}_k^0 \tilde{\omega}_i^{n+1} + \tilde{x}_i^0 \tilde{\omega}_0^j, \qquad (18)$$

причем $\tilde{P}_i = \tilde{x}_i^0 X_{n+1} + P_i$; так как $\tilde{P}_i \equiv P_i$, то $\tilde{x}_i^0 = 0$.

Таким образом, согласно (17), (18) аффинная связность $\tilde{\nabla}$ определяется системой форм

$$\tilde{\theta}_0^j = -g^{jk} a_{ks}^0 \omega_0^s, \quad \tilde{\theta}_i^j = \overset{1}{\theta}{}_i^j + 2\delta_i^j \left(\omega_0^0 - x_k^0 \omega_0^k\right). \tag{19}$$

Отметим, что аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\tilde{\nabla}$ без кручения отнесены к разным системам базисных форм $\{\overset{1}{\theta}{}_0^j \equiv \omega_0^j\}$ и $\{\tilde{\theta}_0^j \equiv -g^{jk} a_{ks}^0 \omega_0^s\}$; приведем их к одной системе $\{\omega_0^j\}$.

Продифференцировав внешним образом (19_1), имеем

$$D\tilde{\theta}_0^j = -(dg^{jk} \wedge a_{ks}^0 \omega_0^s + g^{jk} da_{ks}^0 \wedge \omega_0^s - g^{jk} a_{ks}^0 D\omega_0^s),$$

откуда с использованием квадратичных уравнений $D\tilde{\theta}_0^j = \tilde{\theta}_0^k \wedge \tilde{\theta}_k^j$ и соотношений (5), (7), (19) находим

$$D\omega_0^j = \omega_0^k \wedge \Big[\omega_k^j - \delta_k^j \left(\omega_0^0 + x_l^0 \omega_0^l\right) + a_0^{jl} a_{lks}^0 \omega_0^s - a_0^{jl} x_l^0 a_{tk}^0 \omega_0^t + \\ + a_0^{jp} g_{ps} g^{lt} a_{tk}^0 x_l^0 \omega_0^s\Big].$$

Последние квадратичные уравнения говорят о том, что задание аффинной связности $\tilde{\nabla}$ без кручения системой форм (19) равносильно заданию этой связности системой форм $\left\{\omega_0^j, \bar{\theta}_i^j\right\}$, где

$$\bar{\theta}_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j \left(\omega_0^0 + x_l^0 \omega_0^l\right) + a_0^{jl} a_{lis}^0 \omega_0^s - a_0^{jl} x_l^0 a_{si}^0 \omega_0^s + \\ + a_0^{jk} g_{ks} g^{lt} a_{ti}^0 x_l^0 \omega_0^s.$$

Так как в силу (7), (11), (12) справедливо

$$\bar{\theta}_i^j = \overset{1}{\theta}{}_i^j + a_0^{jt} \mathrm{A}_{tis}^0 \omega_0^s \equiv \overset{2}{\theta}{}_i^j,$$

то доказана

Теорема 2. *Аффинная связность* $\overset{2}{\nabla}$ *без кручения, индуцируемая невырожденной нормализацией* $A_0 \to X_{n+1}$ *конформного пространства* C_n *и определяемая системой форм (12),* *совпадает с аффинной связностью* $\tilde{\nabla}$ *без кручения, индуцируемой нормализацией* $X_{n+1} \to A_0$ *пространства* C_n *и определяемой системой форм (19).*

Список литературы

1. *Акивис М.А.* К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей // Матем. сб. 1961. Т. 53. №1. С. 53—72.

2. *Бушманова Г.В., Норден А.П.* Элементы конформной геометрии. Казань, 1972.

3. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Пробл. геометрии. М.: ВИНИТИ, 1979. Т. 9.

4. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

5. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М, 1976.

6. *Столяров А.В.* Внутренняя геометрия нормализованного конформного пространства // Изв. вузов. Математика. 2002. №11. С. 61—70.

7. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Conformal differential geometry and its generalizations. USA, 1996.

A. Stolyarov

THE GENERALLY CONJUGATED AFFINE CONNECTIONS INDUCED BY NONDEGENERATED NORMALIZATION OF CONFORMAL SPACE

It is shown that:

1) the nondegenerated normalization $A_0 \to X_{n+1}$ of conformal space C_n induces two torsion-free affine connections $\overset{1}{\nabla}$ and $\overset{2}{\nabla}$; these connections are generally conjugated relative to the field of the basis tensor;

2) the connection $\overset{2}{\nabla}$ coincides with torsion-free affine connection $\tilde{\nabla}$ which is induced by normalization $X_{n+1} \to A_0$ of the conformal space C_n.