N. Ryazanov

On basic and fiber forms of principal bundle

The research principal bundle developed in [2, 3] are continued. Based on the structure Laptev equations, structure equations of arbitrary principal bundle are built internally, i. e. coordinate expression for its basic and fiber forms are found.

УДК 514.76

***Л. В. Степанова*[1], *Г. А. Банару*[2]**
[1]*Смоленский филиал МИИТ,* [2]*Смоленский государственный университет*
lide@yandex.ru[1]; mihail.banaru@yahoo.com[2]

О почти контактной метрической структуре на вполне омбилической гиперповерхности келерова многообразия

Доказано, что квазисасакиева структура на вполне омбилической гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести является сасакиевой.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, квазисасакиева структура, сасакиева структура, вполне омбилическая гиперповерхность, келерово многообразие.

1. Давно известно, что на вполне геодезической гиперповерхности келерова многообразия индуцируется косимплектическая структура. Кто именно это установил первым — сказать трудно. Из построений выдающегося американского геометра Д. Блэра [1] этот факт следует также непосредственно,

---

© Степанова Л. В., Банару Г. А., 2016

как, например, из статьи Л.В. Степановой [2] и работ многих других авторов. Также давно известен тот факт, что на вполне омбилической гиперповерхности келерова многообразия может быть реализована сасакиева структура. Здесь можно достоверно утверждать, что именно Д. Блэр в [1] первым установил этот факт. Мы же рассмотрим вопрос о существовании квазисасакиевой структуры на вполне омбилической гиперповерхности келерова многообразия.

Почти контактная метрическая структура индуцируется на всякой ориентируемой гиперповерхности почти эрмитова многообразия. По мнению многих специалистов, именно этим фактом определяется глубокая связь между контактной и эрмитовой геометриями. Почти контактные метрические структуры на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий исследовались и исследуются многими геометрами. Классическими считаются работы таких известных математиков, как С. Сасаки, Д. Блэр, Й. Ишихара, Х. Янамото и К. Яно.

Отметим, что класс келеровых многообразий — самый простой и наиболее изученный класс почти эрмитовых многообразий. Он входит в состав любого из 16 классов Грея — Херволлы почти эрмитовых многообразий, или, если выражаться точнее, каждый из классов Грея — Херволлы почти эрмитовых структур является обобщением класса келеровых многообразий. Поэтому всякий результат о геометрии почти эрмитовых многообразий какого угодно класса имеет самое непосредственное отношение и к келеровым многообразиям.

Настоящая заметка является продолжением исследований авторов о почти контактных метрических структурах на гиперповерхностях почти эрмитовых многообразий. Среди более 40 работ, опубликованных авторами по данной тематике, к данной заметке наиболее близки статьи [2] и [3] о квазисасакиевых гиперповерхностях квазикелеровых и эрмитовых многообразий, а также две работы о почти контактных метрических структурах на гиперповерхностях келеровых многообразий [4; 5].

2. Напомним, что почти контактной метрической структурой на многообразии N называется система тензорных полей $\{\Phi,\ \xi,\ \eta,\ g\}$, для которой выполняются условия [6]

$$\eta(\xi)=1;\ \Phi(\xi)=0;\ \eta\circ\Phi=0;\ \Phi^2=-id+\xi\otimes\eta;$$
$$\langle \Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y),\ X,Y\in\aleph(N).$$

Здесь Φ — поле тензора типа $(1,1)$; ξ — векторное поле, η — ковекторное поле; $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ — риманова метрика; $\aleph(N)$ — модуль гладких векторных полей на многообразии N.

Хорошо известно, что многообразие, допускающее почти контактную метрическую структуру, нечетномерно и ориентируемо. Классическим примером почти контактной метрической структуры является косимплектическая структура [6], о которой говорилось выше. Она характеризуется такими тождествами:

$$\nabla\eta=0,\quad \nabla\Phi=0,$$

где ∇ — риманова связность метрики g. Многообразия, наделенные косимплектической структурой, локально эквивалентны произведению келерова многообразия на вещественную прямую [6].

Напомним определение другого важнейшего вида почти контактной метрической структуры: структура (Φ,ξ,η,g) называется квазисасакиевой, если ее фундаментальная форма $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$ замкнута и выполняется условие

$$N_{\Phi}+\frac{1}{2}d\eta\otimes\xi=0,$$

где N_{Φ} — тензор Нейенхейса оператора Φ.

По нашему мнению, в области геометрии квазисасакиевых структур важнейшей работой является статья В. Ф. Кириченко и А. Р. Рустанова [7].

3. Воспользуемся структурными уравнениями Картана почти контактной метрической структуры на гиперповерхности N^{2n-1} келерова многообразия M^{2n}, $n\geq 3$ [6]:

$$d\omega^\alpha = \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + i\sigma^\alpha_\beta \omega^\beta \wedge \omega + i\sigma^{\alpha\beta}\omega_\beta \wedge \omega;$$

$$d\omega_\alpha = -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta - i\sigma^\beta_\alpha \omega_\beta \wedge \omega - i\sigma_{\alpha\beta}\omega^\beta \wedge \omega;$$

$$d\omega = -i\sigma^\alpha_\beta\, \omega^\beta \wedge \omega_\alpha + i\sigma_{n\beta}\omega \wedge \omega^\beta - i\sigma^\beta_n \omega \wedge \omega_\beta.$$

Здесь $\{\omega^\alpha\}$, $\{\omega_\alpha\}$ — компоненты форм смещения $(\omega^n = \omega)$; $\{\omega^k_j\}$ — компоненты форм римановой связности; $\omega_\alpha = \omega^{\hat{a}}$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, n-1$; $a, b, c = 1, \ldots, n$; $\hat{a} = a + n$; σ — вторая квадратичная форма погружения гиперповерхности N^{2n-1} в келерово многообразие M^{2n}, $n \geq 3$.

Сопоставляя эти уравнения со структурными уравнениями квазисасакиевой структуры [2; 3]:

$$\begin{aligned} d\omega^\alpha &= \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + B^\alpha_\beta \omega^\beta \wedge \omega; \\ d\omega_\alpha &= -\omega^\beta_\alpha \wedge \omega_\beta - B^\beta_\alpha \omega_\beta \wedge \omega; \qquad (1) \\ d\omega &= 2\, B^\alpha_\beta\, \omega^\beta \wedge \omega_\alpha, \end{aligned}$$

мы получаем:

1) $\sigma_{\alpha\beta} = 0$; 2) $\sigma^{\alpha\beta} = 0$; 3) $\sigma^\beta_n = 0$; 4) $\sigma_{n\beta} = 0$.

Это означает, что матрица второй квадратичной формы погружения гиперповерхности N^{2n-1} в келерово многообразие M^{2n} выглядит так:

$$(\sigma_{ps}) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & \sigma_{\alpha\hat{\beta}} \\ \hline 0 \quad 0 & \sigma_{nn} & 0 \quad 0 \\ \hline \sigma_{\hat{\alpha}\beta} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} & 0 \end{array}\right), \quad p, s = 1, \ldots, 2n-1.$$

Пусть гиперповерхность келерова многообразия является вполне омбилической: $\sigma_{ps}=\lambda g_{ps}$, $\lambda - const$. Принимая во внимание вид матрицы метрического тензора:

$$\left(g_{ps}\right)=\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & \begin{matrix}0\\ \dots\\ 0\end{matrix} & I_{n-1} \\ \hline 0\dots0 & 1 & 0\dots0 \\ \hline I_{n-1} & \begin{matrix}0\\ \dots\\ 0\end{matrix} & 0 \end{array}\right),$$

мы можем сделать вывод о том, что «блоки» $(\sigma_{\hat{\alpha}\beta})$ и $(\sigma_{\alpha\hat{\beta}})$ матрицы второй квадратичной формы погружения вполне омбилической гиперповерхности N^{2n-1} в келерово многообразие M^{2n} имеют скалярный вид: $\sigma_{\hat{\alpha}\beta}=i\,\delta^{\alpha}_{\beta}$, $\sigma_{\alpha\hat{\beta}}=-i\,\delta^{\beta}_{\alpha}$. Поэтому структурные уравнения (1) будут выглядеть так:

$$d\omega^{\alpha}=\omega^{\alpha}_{\beta}\wedge\omega^{\beta}-i\omega\wedge\omega^{\alpha};$$

$$d\omega_{\alpha}=-\omega^{\beta}_{\alpha}\wedge\omega_{\beta}+i\omega\wedge\omega_{\alpha};$$

$$d\omega=-2i\omega^{\alpha}\wedge\omega_{\alpha}.$$

А эти структурные уравнения задают сасакиеву структуру [6—8]. В итоге мы пришли к следующему результату.

Теорема. *Квазисасакиева структура на вполне омбилической гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести является сасакиевой.*

Полученный результат дополняет упомянутый выше результат Д. Блэра о вполне омбилических гиперповерхностях келеровых многообразий [1]. Кроме того, он представляет собой уточнение соответствующих результатов, полученных для квазисасакиевых гиперповерхностей квазикелеровых, приближенно келеровых и эрмитовых многообразий [2; 3].

Список литературы

1. *Blair D.E.* Contact manifolds in Riemannian geometry // Lect. Notes Math. 1976. Vol. 509. P. 1—145.
2. *Степанова Л.В.* Квазисасакиева структура на гиперповерхностях эрмитовых многообразий // Научные труды МПГУ им. В.И. Ленина. 1995. С. 187—191.
3. *Stepanova L.V., Banaru M.B.* On hypersurfaces of quasi-Kählerian manifolds // Analele Stiintifice ale Universitatii «Al. I. Cuza» Iasi. 2001. T. 47, №1. P. 65—70.
4. *Abu-Saleem A., Banaru G.A.* On some contact metric structures on hypersurfaces in a Kählerian manifold // Acta Universitatis Apulensis. 2012. Vol. 31. P. 179—189.
5. *Банару М.Б.* О почти контактных метрических 1-гиперповерхностях келеровых многообразий // Сибирский математический журнал. 2014. Т. 55, №4. С. 719—723.
6. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Одесса, 2013.
7. *Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р.* Дифференциальная геометрия квазисасакиевых многообразий // Математический сборник. 2002. Т. 193, №8. С. 71—100.
8. *Банару М.Б.* О сасакиевых гиперповерхностях 6-мерных эрмитовых подмногообразий алгебры Кэли // Математический сборник. 2003. Т. 194, №8. С. 13—24.

L. Stepanova, G. Banaru

On the almost contact metric structure on a totally umbilical hypersurface of a Kählerian manifold

It is proved that the quasi-Sasakian structure on a totally umbilical hypersurface of a Kählerian manifold of dimension $2n \geq 6$ is Sasakian.