УДК 514.76

Ю. И. Шевченко

ДЕРИВАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ И УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЙ

С помощью деривационных формул Акивиса и структурных уравнений Лаптева для гладких многообразий двумя способами получены соответствующие формулы и уравнения аффинного пространства. Использованы иерархия гладких многообразий и главное расслоение линейных кореперов над гладким многообразием.

Using the derivation formulas of Akivis and the Laptev structure equations for smooth manifolds, two methods yield corresponding formulas and equations for an affine space are received. The hierarchy of smooth manifolds and a principal bundle of linear coframes over a smooth manifold are used.

Ключевые слова: деривационные формулы Акивиса, структурные уравнения Лаптева, векторы 2-го порядка, полуголономное гладкое многообразие, расслоение линейных кореперов, аффинная связность.

Key words: Akivis derivation formulas, Laptev structure equations, second-order vectors, semi-holonomic smooth manifold, bundle or linear coframes, affine connection.

1. Постановка задачи

В n-мерном аффинном пространстве A_n широко известны деривационные формулы

$$dx = \omega^i e_i, \; de_i = \omega_i^j e_j \; (i, ... = \overline{1, n}), \tag{1}$$

где точка $x \in A_n$, dx — вектор, характеризующий смещение точки x с точностью до 1-го порядка, или дифференциал точки; ω^i — линейные дифференциальные формы от параметров, определяющих перемещения точки x; e_i — базисные векторы подвижного репера $\{x, e_i\}$; de_i — смещения векторов e_i с точностью до 1-го порядка, или дифференциалы векторов e_i; ω_i^j — линейные дифференциальные формы от параметров, определяющих перемещения точки x и векторов e_i.

Используя полную интегрируемость каждого уравнения системы (1) или внутреннюю структуру форм ω^i, ω_j^i, выводятся (см.: [1; 2]) уравнения

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2017. № 2. С. 5 – 13.

структуры аффинного пространства A_n, точнее, структурные уравнения аффинной группы $GA(n)$, действующей в пространстве A_n:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k, \tag{2}$$

где D — символ внешнего дифференциала, $\wedge$ — знак внешнего умножения.

Получим деривационные формулы (1) и структурные уравнения (2) для аффинного пространства A_n с внешней точки зрения, отталкиваясь от понятия гладкого многообразия, непосредственно обобщающего гладкие поверхности аффинного пространства и само аффинное пространство.

2. Формулы Акивиса и уравнения Лаптева

Рассмотрим n-мерное гладкое многообразие M_n, для которого используем деривационные формулы Акивиса [3] и структурные уравнения Лаптева [4].

Первая формула Акивиса имеет вид (1_1), где e_i — базисные векторы n-мерного векторного пространства T_n, касающегося многообразия M_n в точке $x \in M_n$.

Эта формула позволяет записать цепочку эквивалентностей

$$x - \mathrm{const} \Leftrightarrow dx = \bar{0} \leftrightarrow \omega^i e_i = \bar{0} \Leftrightarrow \omega^i = 0,$$

в конце которой находятся уравнения стационарности точки x.

Полную интегрируемость системы $\omega^i = 0$ дает 1-я серия структурных уравнений Лаптева, имеющая вид (2_1).

Замечание 1. В отличие от аффинного пространства A_n 1-ю формулу Акивиса для многообразия M_n нельзя проинтегрировать [5], но можно дифференцировать.

Продолжим дифференциальное уравнение (1_1) в предположении, что dx — полный дифференциал, т. е. $D(dx) = \bar{0}$. Сначала замкнем уравнение (1_1) с использованием структурных уравнений (2_1):

$$(de_i - e_j \omega^j_i) \wedge \omega^i = \bar{0}.$$

Затем разрешим квадратичные уравнения по векторной лемме Картана:

$$de_i = \omega^j_i e_j + \omega^j e_{ij}, \quad e_{[ij]} = \bar{0}, \tag{3}$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование, а e_{ij} — симметричные векторы 2-го порядка, или диффузоры (см.: [3; 6—10]), принадлежащие соприкасающемуся пространству

$$T_{\frac{1}{2}n(n+3)} \supset T_n.$$

Формула (3_1) является второй деривационной формулой Акивиса.

Замечание 2. Векторы e_i можно интерпретировать линейными дифференциальными операторами, а векторы e_{ij} — дифференциальными операторами 2-го порядка [8—10].

Продолжим структурные уравнения (2_1) на многообразии M_n. Замыкая их, получим

$$(D\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i) \wedge \omega^j = 0.$$

Разрешим эти кубичные уравнения по лемме Лаптева [4]:

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \tag{4}$$

причем новые формы ω_{jk}^i удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}\omega_{jk}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \Leftrightarrow \omega_{[jk]}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \Leftrightarrow \omega_{[jk]}^i = \lambda_{jkl}^i \omega^l, \\ \lambda_{(jk)l}^i = 0, \quad \lambda_{\{jkl\}}^i = 0,\end{gathered} \tag{5}$$

где круглые скобки обозначают симметрирование, а фигурные скобки — циклирование.

Уравнения (4) составляют вторую серию структурных уравнений Лаптева для гладкого многообразия M_n.

3. Иерархия гладких многообразий

Определение 1. Если коэффициенты $\lambda_{jkl}^i \neq 0$, т. е. формы ω_{jk}^i локально симметричны, то многообразие M_n называется [11] *полуголономным гладким многообразием* M_n^S (1-го порядка).

Если $\lambda_{jkl}^i = 0 \Leftrightarrow \omega_{[jk]}^i = 0$, т. е. формы ω_{jk}^i симметричны, то M_n называется [7] *голономным гладким многообразием* M_n^H (1-го порядка).

Если $\omega_{jk}^i = 0$, то M_n называется [11] *тривиальным гладким многообразием* M_n^T, причем структурные уравнения (4) вырождаются в уравнения (2_2), т. е. $M_n^T = A_n$.

Замечание 3. Тривиальное многообразие M_n^T является, вообще говоря, базой плоского пространства аффинной связности ${}^0L_{n^2,n}^0$, т. е. пространства без кручения и кривизны [12, с. 85]. Используемый локальный аппарат не позволяет различать пространство ${}^0L_{n^2,n}^0$ и аффинную группу $GA(n)$.

При продолжении структурных уравнений (4) аналогично определяются *полуголономное*, *голономное* и *тривиальное гладкие многообразия 2-го порядка*, причем предполагается, что полуголономность и голономность 2-го порядка поглощают соответствующие условия 1-го порядка.

Утверждение 1. *Пусть выполняется более сильное условие по сравнению с условием полуголономности* (5₁)*:*

$$\omega^i_{jk} = \mu^i_{jkl}\omega^l, \tag{6}$$

т. е. формы ω^i_{jk} *локально аннулируются, тогда многообразие* M_n *является базой* M_n^A *пространства аффинной связности без кручения* $L^0_{n^2,n}$, *причем в случае*

$$\mu^i_{j[kl]} = 0 \tag{7}$$

многообразие M_n^A *становится аффинным пространством* A_n.

Доказательство. Действительно, подставим равенства (6) в структурные уравнения (4):

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l, \;\; R^i_{jkl} = \mu^i_{j[kl]}. \tag{8}$$

Получили структурные уравнения (2_1), (8_1) пространства аффинной связности без кручения $L^0_{n^2,n}$, причем компоненты объекта кривизны выражаются по формуле (8_2). Базой пространства $L^0_{n^2,n}$ является многообразие M_n^A со структурными уравнениями (2_1).

При выполнении условия (7) $R^i_{jkl} = 0$, поэтому структурные уравнения (8_1) превращаются в уравнения (2_2), которые в совокупности с уравнениями (2_1) являются уравнениями структуры аффинного пространства A_n. □

Определение 2. Если условие полуголономости (5) не выполняется, т. е. структурные уравнения (4) получены не продолжением уравнений (2_1) в результате факторизации, то будем говорить [7; 13] о *неголономном гладком многообразии* M_n^N (1-го порядка).

Иерархия рассмотренных гладких многообразий 1-го порядка имеет вид

$$M_n^N \to M_n^S \begin{matrix} \to M_n^H \to \\ \to M_n^A \to \end{matrix} A_n,$$

где стрелка означает, что каждое следующее многообразие является особым случаем предыдущего.

3. Аффинная связность в расслоении линейных кореперов

Далее под M_n будем понимать неголономное гладкое многообразие 2-го порядка, определяемое аналогично многообразию M_n^N. Полученные результаты конкретизируем для полуголономных многообразий.

Над многообразием M_n рассмотрим расслоение линейных кореперов $L_{n^2}(M_n)$ со структурными уравнениями (2_1), (4). Типовым слоем главного расслоения $L_{n^2}(M_n)$ является линейная группа $L_{n^2}=GL(n)$, действующая в n-мерном векторном касательном пространстве T_n. С помощью этого расслоения переформулируем утверждение 1.

Утверждение 2. *Расслоение линейных кореперов* $L_{n^2}(M_n)$ *со структурными уравнениями* (2₁), (4) *в специальном случае* (6), (7) *вырождается в прямое произведение* $A_n\times L_{n^2}$, *иначе говоря, становится аффинной группой* $GA(n)$, *действующей в пространстве* A_n.

Рассмотрим общий случай, когда расслоение $L_{n^2}(M_n)$ не является пространством аффинной связности $L^0_{n^2,n}$, т. е. не выполняется условие (6). Изложим способ Лаптева — Лумисте для задания аффинной связности в главном расслоении $L_{n^2}(M_n)$.

А. Фундаментально-групповую связность в расслоении $L_{n^2}(M_n)$ назовем *аффинной связностью Лаптева* и зададим с помощью форм

$$\Omega^i_j=\omega^i_j-\Gamma^i_{jk}\omega^k, \tag{9}$$

причем компоненты объекта аффинной связности Γ^i_{jk} удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta\Gamma^i_{jk}+\omega^i_{jk}=\Gamma^i_{jkl}\omega^l, \tag{10}$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma^i_{jk}=d\Gamma^i_{jk}+\Gamma^l_{jk}\omega^i_l-\Gamma^i_{lk}\omega^l_j-\Gamma^i_{jl}\omega^l_k.$$

Б. Подставляя формы аффинной связности (9) в структурные уравнения (2₁), получим

$$D\omega^i=\omega^j\wedge\Omega^i_j+S^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^k,\ \ S^i_{jk}=\Gamma^i_{[jk]}. \tag{11}$$

Из дифференциальных уравнений (10) следует, что компоненты объекта кручения S^i_{jk} аффинной связности удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta S^i_{jk}+\omega^i_{[jk]}\cong 0\,(\mathrm{mod}\ \omega^i),$$

которые для полуголономного многообразия M^S_n принимают тензорный вид

$$\Delta S^i_{jk}\cong 0.$$

В. Формы аффинной связности (9) удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\Omega^i_j=\Omega^k_j\wedge\Omega^i_k+\Re^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l,\ \ \Re^i_{jkl}=\Gamma^i_{j[kl]}-\Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]}, \tag{12}$$

где альтернирование выполняется по крайним индексам в квадратных скобках.

Г. Продолжение структурных уравнений (4) имеет вид

$$D\omega^i_{jk} = \omega^l_{jk} \wedge \omega^i_l - \omega^i_{lk} \wedge \omega^l_j - \omega^i_{jl} \wedge \omega^l_k + \omega^l \wedge \omega^i_{jkl}, \tag{13}$$

$$\omega^i_{j[kl]} = \lambda^i_{jklm}\omega^m, \quad \lambda^i_{j(kl)m} = 0, \quad \lambda^i_{j\{klm\}} = 0. \tag{14}$$

Уравнения (13) образуют 3-ю серию структурных уравнений Лаптева [4], который предполагал симметрию по нижним индексам всех форм

$$\omega^i_{jk}, \omega^i_{jkl}, \ldots$$

Отметим, что условия (14) выполняются для полуголономного гладкого многообразия 2-го порядка $\overset{2}{M}{}^S_n$, но не имеют места для неголономного многообразия.

Д. В результате продолжения дифференциальных уравнений (10) с помощью структурных уравнений (2_1), (4), (13) находятся дифференциальные сравнения для пфаффовых производных Γ^i_{jkl} объекта Γ^i_{jk} :

$$\Delta\Gamma^i_{jkl} + \Gamma^m_{jk}\omega^i_{ml} - \Gamma^i_{mk}\omega^m_{jl} - \Gamma^i_{jm}\omega^m_{kl} + \omega^i_{jkl} \cong 0.$$

Проальтернируем эти сравнения по индексам k, l:

$$\Delta\Gamma^i_{j[kl]} + \Gamma^m_{j[k}\omega^i_{ml]} - \Gamma^i_{m[k}\omega^m_{jl]} - \Gamma^i_{jm}\omega^m_{[kl]} + \omega^i_{j[kl]} \cong 0. \tag{15}$$

Е. Запишем дифференциальные сравнения для свернутых произведений $\Gamma^m_{jk}\Gamma^i_{ml}$ и проальтернируем их по индексам k, l:

$$\Delta\Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]} + \omega^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]} + \Gamma^m_{j[k}\omega^i_{ml]} \cong 0.$$

Вычитая эти сравнения из сравнений (15) и пользуясь обозначением (12_2), получим

$$\Delta\mathfrak{R}^i_{jkl} - \Gamma^i_{jm}\omega^m_{[kl]} + \omega^i_{j[kl]} \cong 0. \tag{16}$$

В случае полуголономного гладкого многообразия 2-го порядка $\overset{2}{M}{}^S_n$ в силу условий (5_1), (14_1) дифференциальные сравнения (16) для компонент объекта кривизны $\mathfrak{R}^i_{jkl}$ аффинной связности принимают тензорный вид:

$$\Delta\mathfrak{R}^i_{jkl} \cong 0.$$

Утверждение 3. *Задание аффинной связности в расслоении линейных корепероов* $L_{n^2}(M_n)$ *превращает его в пространство аффинной связности* $L_{n^2,n}$ *со структурными уравнениями* (11_1), (12_1).

В случае полуголономного гладкого многообразия $\overset{2}{M}{}^S_n$ *объекты кручения* S^i_{jk} *и кривизны* R^i_{jkl} *являются тензорами, поэтому при их аннулировании пространство* $L_{n^2,n}$ *становится аффинной группой* $GA(n) = A_n \times L_{n^2}$ *со структурными уравнениями*

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \Omega^i_j, \; D\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k. \tag{17}$$

5. О вырождении соприкасающихся пространств

Рассмотрим подробнее полуголономное гладкое многообразие M^S_n. Пусть каждое соприкасающееся пространство T^2 вырождается в касательное пространство T_n, тогда симметричные векторы 2-го порядка e_{ij} — векторы 1-го порядка, поэтому раскладываются по базису e_k :

$$e_{ij} = L^k_{ij} e_k, \; L^k_{[ij]} = 0. \tag{18}$$

Подставим разложения (18_1) в деривационные формулы (3_1)

$$de_i = \theta^j_i e_j, \; \theta^j_i = \omega^j_i + L^j_{ik}\omega^k. \tag{19}$$

Получили аналог (19_1) 2-й деривационной формулы (1_2) в аффинном пространстве A_n.

Внесем формы (19_2) в структурные уравнения (2_1), используемые для многообразия M^S_n :

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \theta^i_j - L^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k.$$

Альтернируя коэффициенты L^i_{jk} по нижним индексам и учитывая условия (18_2), получим аналог 1-й серии (2_1) структурных уравнений аффинной группы $GA(n)$:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \theta^i_j. \tag{20}$$

Найдем структурные уравнения для форм θ^i_j, дифференцируя их выражения (19_2) внешним образом с помощью структурных уравнений (4), (20):

$$D\theta^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + (dL^i_{jk} - L^i_{jl}\omega^l_k - \omega^i_{jk}) \wedge \omega^k. \tag{21}$$

Преобразуем 1-е слагаемое, используя выражения (19_2):

$$\omega^m_j \wedge \omega^i_m = \theta^m_j \wedge \theta^i_m - L^m_{jk}\omega^k \wedge \theta^i_m - \theta^m_j \wedge L^i_{ml}\omega^l + L^m_{jk}\omega^k \wedge L^i_{ml}\omega^l.$$

Во 2-м и 3-м слагаемых вернемся к исходным формам:

$$\omega^k_j \wedge \omega^i_k = \theta^k_j \wedge \theta^i_k - L^m_{jk}\omega^k \wedge \omega^i_m - \omega^m_j \wedge L^i_{ml}\omega^l - L^m_{jk}\omega^k \wedge L^i_{ml}\omega^l.$$

Подставим результат в структурные уравнения (21):

$$D\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \omega^k \wedge \theta^i_{jk}, \tag{22}$$

$$\theta^i_{jk} = \omega^i_{jk} - \Delta L^i_{jk} - L^m_{jk} L^i_{ml} \omega^l. \tag{23}$$

Потребуем, чтобы уравнения (22) были аналогом 2-й серии (2_2) структурных уравнений аффинной группы $GA(n)$, т. е.

$$\omega^k \wedge \theta^i_{jk} = 0 \;\Leftrightarrow\; \theta^i_{jk} = \Lambda^i_{jkl}\omega^l, \quad \Lambda^i_{j[kl]} = 0. \tag{24}$$

Подставим выражения (23) в пфаффовы уравнения (24_2) и запишем результат в виде

$$\Delta L^i_{jk} - \omega^i_{jk} \cong 0. \tag{25}$$

Сопоставляя дифференциальные уравнения (10) и сравнения (25), можем положить $L^i_{jk} = -\Gamma^i_{jk}$. Тогда совпадут формы (9) и (19_2) $\Omega^i_j = \theta^i_j$ и структурные уравнения (17_1) и (20).

Утверждение 4. *Вырождение соприкасающихся пространств T^2 к полуголономному гладкому многообразию M^S_n в соответствующие касательные пространства T_n эквивалентно заданию аффинной связности без кручения в расслоении линейных корепероь $L_{n^2}(M^S_n)$.*

Пусть многообразие M^S_n вырождается в базу M^A_n пространства $L^0_{n^2,n}$, т. е. выполняется условие (6). Тогда дифференциальные сравнения (25) принимают тензорный вид

$$\Delta L^i_{jk} \cong 0,$$

поэтому инвариантны равенства $L^i_{jk} = 0$. Их подстановка в формулы (18_1), (19_2) дает

$$e_{ij} = \overline{0}, \theta^i_j = \omega^i_j,$$

поэтому деривационная формула (19_1) принимает вид (1_2), а структурные уравнения (20), (22) становятся уравнениями (2_1), (8).

Утверждение 5. *Аннулирование векторов 2-го порядка $e_{ij} = \overline{0}$ эквивалентно вырождению полуголономного гладкого многообразия M^S_n в базу M^A_n пространства аффинной связности без кручения $L^0_{n^2,n}$.*

Список литературы

1. *Столяров А. В.* Метод внешних форм Картана и группы Ли. Чебоксары, 1997.

2. *Столяров А. В.* Системы уравнений Пфаффа в инволюции. Классические пространства. Чебоксары, 1998.

3. *Акивис М. А.* Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин, 1977.

4. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. Семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

5. *Евтушик Л. Е.* Уникальная школа Картана-Лаптева, ее сбережение // Дифф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2008. Вып. 39. С. 44—62.

6. *Рыбников А. К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981. Т. 29, вып. 2. С. 279—290.

7. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

8. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М., 1987.

9. *Catuogno P.* On stochastic parallel transport and prolongation of connections // Revista de la Unión Mathemática Argentina. 1999. Vol. 41, №3. P. 107-118.

10. *Emery M.* An invitation to second-order stochastic differential geometry. 2007. URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00145073 (дата обращения: 20.03.2017).

11. *Шевченко Ю. И.* Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // Дифф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 168—177.

12. *Josef Mikes et al.* Differential geometry of special mappings. Olomouc, 2015.

13. *Shevchenko Ju. I., Skrydlova E. V.* About non-holonomicity of quotient manifold of holonomic distribution on semi-holonomic smooth manifold // Междун. конф. по алгебре, анализу и геометрии. Казань, 2016. С. 67—68.

Об авторе

Юрий Иванович Шевченко — канд. физ.–мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: ESkrydlova@kantiana.ru

About the author

Dr Yuri Shevchenko – Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: ESkrydlova@kantiana.ru

УДК 514.75

Ю. И. Попов

О ПОЛЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ $\mathscr{H}$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Продолжается построение геометрических объектов гиперполосного распределения ($\mathscr{H}$-распределения) аффинного пространства A_n в дифференциальных окрестностях 1—3-го порядков. В результате построены (найдены) внутренним инвариантным образом ряд новых нормализаций в смысле Нордена основных структурных подрасслоений данного $\mathscr{H}$-распределения.

A creation of geometric objects of the hyperband distribution ($\mathscr{H}$-distribution) of affine space A_n in the differential 1–3rd orders neighborhoods is continued. As a result a number of new normalization in Norden's sense of the main structural subbundles of this $\mathscr{H}$-distribution are constructed (are found) internally invariantly.

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2017. № 2. С. 13–23.