УДК 514.75

А. В. Вялова

(Калининградский государственный технический университет)

ОБЩАЯ АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ В ПРОЕКТИВНОЙ ГРУППЕ

В многомерном проективном пространстве проективная группа представлена в виде расслоения аффинных реперов с фактор-расслоением линейных реперов над базой — пространством гиперплоскостей исходного проективного пространства. В главном расслоении аффинных реперов приемом Лумисте задана общая аффинная связность. Объект связности является квазитензором, содержащим подквазитензор, задающий двойственную аффинную подсвязность в фактор-расслоении линейных реперов. Построены тензоры кручения и кривизны общей аффинной связности, содержащие подтензоры кручения и кривизны двойственной аффинной подсвязности.

Ключевые слова: проективное пространство, расслоение аффинных реперов, общая аффинная связность, объекты кручения и кривизны.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I,... = \overline{1,n})$ с деривационными формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A, \tag{1}$$

где форма θ играет роль множителя пропорциональности, а структурные формы $\omega^I, \omega_J^I, \omega_I$ проективной группы $GP(n)$, эффективно действующей в пространстве P_n, удовлетворяют уравнениям Картана

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I; \tag{2}$$

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I; \tag{3}$$

$$D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J. \tag{4}$$

Запишем структурные уравнения (3) в виде:

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \omega_K \wedge \Omega_J^{IK}; \tag{5}$$

$$\Omega_J^{IK} = \delta_J^I \omega^K + \delta_J^K \omega^I. \tag{6}$$

Получили структурные уравнения (2, 4, 5) главного расслоения аффинных реперов $A_{n(n+1)}(P_n^*)$, базой которого служит пространство гиперплоскостей исходного проективного пространства (т. е. многообразие Грассмана $P_n^* = Gr(n-1, n)$), а типовым слоем — аффинная группа $A_{n(n+1)} = GA(n) \subset GP(n)$. Из второй подсистемы уравнений (1) видно, что условием инвариантности совокупности точек A_I, т. е. натянутой на них гиперплоскости P_{n-1}, является система уравнений $\omega_I = 0$, которая вполне интегрируема в силу структурных уравнений (4).

Утверждение 1. *Расслоение аффинных реперов $A_{n(n+1)}(P_n^*)$ имеет главное фактор-расслоение линейных реперов $L_{n^2}(P_n^*)$ со структурными уравнениями (4, 5).*

Зададим общую аффинную связность в главном расслоении приемом Лумисте. Рассмотрим преобразование слоевых форм ω_J^I, ω^I с помощью линейных комбинаций базисных форм ω_I:

$$\tilde{\omega}_J^I = \omega_J^I - \Pi_J^{IK} \omega_K, \quad \tilde{\omega}^I = \omega^I - \Pi^{IJ} \omega_J, \tag{7}$$

где Π_J^{IK}, Π^{IJ} — некоторые функции.

Продифференцируем формы (7) внешним образом с учетом структурных уравнений (2, 4, 5) и заменим в полученных уравнениях структурные формы на их выражения через формы связности из (7), группируя при этом слагаемые, содержащие базисные формы. Затем сделаем обратную замену по формулам (7) в тех слагаемых, где формы связности внешним образом умножаются на базисные. Окончательно имеем:

$$D\widetilde{\omega}_J^I = \widetilde{\omega}_J^K \wedge \widetilde{\omega}_K^I + \omega_K \wedge (\varDelta \varPi_J^{IK} + \varOmega_J^{IK}) - \varPi_J^{KL}\omega_L \wedge \varPi_K^{IM}\omega_M, \quad (8)$$

$$D\widetilde{\omega}^I = \widetilde{\omega}^J \wedge \widetilde{\omega}_J^I + \omega_J \wedge (\varDelta \varPi^{IJ} - \varPi_L^{IJ}\omega^L) - \varPi^{JK}\omega_K \wedge \varPi_J^{IL}\omega_L, \quad (9)$$

причем дифференциальный оператор $\varDelta$ действует следующим образом:

$$\varDelta \varPi_J^{IK} = d\varPi_J^{IK} + \varPi_J^{IL}\omega_L^K + \varPi_J^{LK}\omega_L^I - \varPi_L^{IK}\omega_J^L.$$

В соответствии с теоремой Картана — Лаптева зададим поле объекта общей аффинной связности $\varPi = \{\varPi_J^{IK}, \varPi^{IJ}\}$, компоненты которой удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\varDelta \varPi_J^{IK} + \varOmega_J^{IK} = \varPi_J^{IKL}\omega_L, \quad (10)$$

$$\varDelta \varPi^{IJ} - \varPi_L^{IJ}\omega^L = \varPi_J^{IJK}\omega_K. \quad (11)$$

Утверждение 2. *Объект связности $\varPi$ является квазитензором, содержащим подквазитензор $\{\varPi_J^{IK}\}$, задающий двойственную аффинную связность в фактор-расслоении линейных реперов.*

Подставляя дифференциальные уравнения (10, 11) в структурные уравнения для форм связности (8, 9), получим

$$D\widetilde{\omega}_J^I = \widetilde{\omega}_J^K \wedge \widetilde{\omega}_K^I + K_J^{IKL}\omega_K \wedge \omega_L, \quad (12)$$

$$D\widetilde{\omega}^I = \widetilde{\omega}^J \wedge \widetilde{\omega}_J^I + K^{IJK}\omega_J \wedge \omega_K, \quad (13)$$

где компоненты объекта общей аффинной кривизны $K = \{K_J^{IKL}, K^{IJK}\}$ выражаются по формулам:

$$K_J^{IKL} = \varPi_J^{I[KL]} - \varPi_J^{M[K}\varPi_M^{IL]}, \quad K^{IJK} = \varPi^{I[JK]} - \varPi^{L[J}\varPi_L^{IK]}, \quad (14)$$

причем квадратные скобки означают альтернирование по крайним индексам в них.

Внесем формы двойственной аффинной подсвязности (7_1) в структурные уравнения для базисных форм (4):

$$D\omega_I = \widetilde{\omega}_I^J \wedge \omega_J + T_I^{JK}\omega_K \wedge \omega_J, \tag{15}$$

где

$$T_I^{JK} = \Pi_I^{[JK]} \tag{16}$$

— компоненты объекта двойственного аффинного кручения общей аффинной связности. Из дифференциальных уравнений (10) с учетом симметричности форм Ω_I^{JK} по верхним индексам следуют дифференциальные сравнения

$$\Delta T_I^{JK} \equiv 0 \ (mod\ \omega_L). \tag{17}$$

Утверждение 3. *Задание связности в расслоении аффинных реперов $A_{n(n+1)}(P_n^*)$ превращает его в пространство общей аффинной связности $A_{n(n+1),n}$ со структурными уравнениями (12, 13, 15), в которые входят тензор двойственного аффинного кручения T_I^{JK} и компоненты объекта кривизны общей аффинной связности $K = \{K_J^{IKL}, K^{IJK}\}$. Пространство $A_{n(n+1),n}$ имеет фактор-пространство двойственной аффинной связности $L_{n^2,n}$.*

Можно ввести объект общего аффинного кручения $T = \{T_I^{JK}, T^{IJ}\}$, где $T^{IJ} = \Pi^{[IJ]}$. Из дифференциальных уравнений (11) следуют сравнения

$$\Delta T^{IJ} - T_K^{IJ}\omega^K \equiv 0,$$

которые вместе со сравнениями (17) дают

Утверждение 4. *Объект общего аффинного кручения $T = \{T_I^{JK}, T^{IJ}\}$ общей аффинной связности, задаваемой полем объекта $\Pi = \{\Pi_J^{IK}, \Pi^{IJ}\}$, образует тензор, содержащий подтензор двойственного аффинного кручения T_I^{JK}.*

Найдем сравнения на компоненты объекта общей аффинной кривизны *K*. Для этого продолжим дифференциальные уравнения (10, 11). Сначала продифференцируем их внешним образом, затем разрешим квадратичные уравнения по лемме Картана, используя обозначения (6) трехиндексных форм Ω_J^{IK}, и запишем результат в виде сравнений:

$$\Delta\Pi_J^{IKL} - \delta_J^L \Pi_M^{IK}\omega^M + \Pi_J^{LK}\omega^I + \Pi_J^{IL}\omega^K + \Pi_J^{IK}\omega^L \equiv 0,$$
$$\Delta\Pi^{IJK} + 2\Pi^{IJ}\omega^K + \Pi^{KJ}\omega^I + \Pi^{IK}\omega^J - \Pi_L^{IJK}\omega^L \equiv 0.$$

Проальтернируем левые части этих сравнений по двум последним индексам:

$$\Delta\Pi_J^{I[KL]} - \delta_J^{[L}\Pi_M^{IK]}\omega^M + \Pi_J^{[LK]}\omega^I \equiv 0; \qquad (18)$$
$$\Delta\Pi^{I[JK]} + \Pi^{I[J}\omega^{K]} + \Pi^{[KJ]}\omega^I - \Pi_L^{I[JK]}\omega^L \equiv 0. \qquad (19)$$

Получим сравнения для входящих в формулы (14) агрегатов

$$\Delta\Pi_J^{M[K}\Pi_M^{IL]} + \delta_J^{[K}\Pi_M^{IL]}\omega^M + \Pi_J^{[LK]}\omega^I \equiv 0,$$
$$\Delta\Pi^{L[J}\Pi_L^{IK]} - \Pi_M^{L[J}\Pi_L^{IK]}\omega^M + \Pi^{I[J}\omega^{K]} + \Pi^{[KJ]}\omega^I \equiv 0.$$

Вычтем левые части получившихся сравнений из левых частей сравнений (18, 19) и используем формулы (14):

$$\Delta K_J^{IKL} \equiv 0, \;\; \Delta K^{IJK} - K_L^{IJK}\omega^L \equiv 0.$$

Утверждение 5. *Объект общей аффинной кривизны $K = \{K_J^{IKL}, K^{IJK}\}$ является тензором, содержащим подтензор двойственной аффинной кривизны $\{K_J^{IKL}\}$.*

Вывод. Структурные уравнения (2—4) проективной группы *GP(n)*, действующей в проективном пространстве P_n, имеют двойственный вид. В работе [1] они представлены в виде структурных уравнений расслоения центропроективных реперов над пространством P_n. В настоящей статье структурные уравнения проективной группы рассмотрены как уравнения расслоения аффинных реперов над двойственным пространством P_n^*, поэтому полученные результаты двойственны результатам работы [1].

Список литературы

1. *Шевченко Ю. И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве. Калининград, 2009.

A. Vyalova

GENERALIZED AFFINE CONNECTION
IN THE PROJECTIVE GROUP

In many-dimensional projective space the projective group as affine frame bundle with linear frame factor-bundle under the base — space of hyperplanes of projective space is introduced. In the principal affine frame bundle general affine connection by Lumiste way is given. The connection object is quasitensor, which contains subquasitensor, seting dual affine subconnection in the linear frame factor-bundle. Torsion and curvature tensors of the general affine connection, containing torsion and curvature subtensors of the dual affine subconnection, are constructed.

УДК 514.75

Н. А. Елисеева

(Калининградский государственный технический университет)

**ПОЛЯ ПЛОСКОСТЕЙ,
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ В НОРМАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЯХ
$\mathcal{H}$(П)-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ**

Рассмотрены поля плоскостей, являющиеся параллельными в нормальных связностях, индуцируемых $\mathcal{H}$(П)-распределением в расслоениях нормалей 1-го рода на оснащенном в смысле Нордена — Картана Λ-подрасслоении [1].

Ключевые слова: нормальная связность, распределение, подрасслоение, поле плоскостей, оснащение.