УДК 514.76

Н. А. Рязанов
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
ryazanov-92@mail.ru

О базисных и слоевых формах главного расслоения

Продолжается исследование главного расслоения, начатое в [2; 3]. Исходя из структурных уравнений Лаптева, построены структурные уравнения произвольного главного расслоения внутренним образом, т. е. найдены координатные выражения для его базисных и слоевых форм.

Ключевые слова: главное расслоение, структурные уравнения и деривационные формулы, базисные и слоевые координаты, базисные и слоевые формы.

1. Структурные уравнения и формы главного расслоения. Рассмотрим структурные уравнения Лаптева $(n+r)$-мерного многообразия M_{n+r}

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I \quad (I, J, K, ... = 1, ..., n+r). \tag{1}$$

Продолжая (1), найдем структурные уравнения

$$d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \omega^K \wedge \omega_{JK}^I.$$

Координатные выражения структурных форм имеют вид

$$\omega^I = x_J^I dx^J,\ \omega_J^I = x_K^I d\tilde{x}_J^K + x_{JK}^I \omega^K, \tag{2}$$

причем $x_K^I \tilde{x}_J^K = \delta_J^I$, а координаты x_{JK}^I симметричны по нижним индексам.

Исходя из структурных уравнений Лаптева (1) и выражений форм (2), построим внутренним образом структурные уравнения произвольного главного расслоения, т. е. найдем выражения для его базисных и слоевых форм. Структурные уравнения главного расслоения $G_r(M_n)$ имеют вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega^\alpha_i, \tag{3}$$

где $C^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные константы, удовлетворяющие условию антисимметрии по нижним индексам и тождествам Якоби. Индексы $I, J, K, ...$ разбиты на серии $i, j, k, ... = 1, ..., n$; $\alpha, \beta, \gamma, ... = n+1, ..., n+r$. Матрица координат (x^I_J) на расслоении $G_r(M_n)$ имеет вид $\begin{pmatrix} x^i_j & 0 \\ x^\alpha_j & x^\alpha_\beta \end{pmatrix}$ [5], тогда координатные выражения для базисных ω^i и слоевых ω^α форм расслоения $G_r(M_n)$ принимают вид

$$\omega^i = x^i_j dx^j, \; \omega^\alpha = x^\alpha_i dx^i + x^\alpha_\beta dx^\beta. \tag{4}$$

Матрицы координат $(x^i_j), (x^\alpha_\beta)$ являются невырожденными. Из невырожденности матрицы (x^I_J) и равенства нулю координат x^i_α следует условие $x^\alpha_j \tilde{x}^j_i + x^\alpha_\beta \tilde{x}^\beta_j = 0.$

Из (2_2) следует, что выражения на формы $\omega^I_J = \{\omega^i_j, \omega^i_\alpha, \omega^\alpha_i, \omega^\alpha_\beta\}$ имеют, соответственно, вид

$$\begin{aligned} &\omega^i_j = x^i_k d\tilde{x}^k_j + x^i_{jk}\omega^k, \quad \omega^i_\alpha = 0, \\ &\omega^\alpha_i = x^\alpha_j d\tilde{x}^j_i + x^\alpha_\beta d\tilde{x}^\beta_i + x^\alpha_{ij}\omega^j + x^\alpha_{i\beta}\omega^\beta, \\ &\omega^\alpha_\beta = x^\alpha_\gamma d\tilde{x}^\gamma_\beta + x^\alpha_{\beta i}\omega^i + x^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma, \end{aligned} \tag{5}$$

причем $x^i_{jk} = x^i_{kj}, x^\alpha_{ij} = x^\alpha_{ji}, x^\alpha_{i\beta} = x^\alpha_{\beta i}, x^\alpha_{\beta\gamma} = x^\alpha_{\gamma\beta}$.

Запишем структурные уравнения (3_2) в виде

$$d\omega^\alpha = \omega^i \wedge \omega^\alpha_i + \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta,$$

где

$$\omega^\alpha_\beta = C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma . \tag{6}$$

Формы ω^α_β распишем подробно с учетом разложения слоевых форм (4_2):

$$\omega^\alpha_\beta = C^\alpha_{\beta\gamma}(x^j_i dx^i + x^\gamma_\delta dx^\delta).$$

С другой стороны, используя (2_2), формы ω^α_β можно записать в виде

$$\omega^\alpha_\beta = x^\alpha_\gamma d\widetilde{x}^\gamma_\beta + x^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma + x^\alpha_{\beta i}\omega^i .$$

Приравнивая полученные выражения для форм ω^α_β и выражая дифференциалы dx^α_δ, имеем

$$\begin{aligned} dx^\alpha_\delta = -x^\alpha_\delta\left(\left(C^\delta_{\beta\gamma} - x^\delta_{\beta\gamma}\right)x^\delta_i - x^\delta_{\beta j}x^j_i\right)dx^i - \\ - x^\alpha_\delta\left(C^\delta_{\beta\varepsilon} - x^\delta_{\beta\varepsilon}\right)x^\varepsilon_\gamma dx^\gamma. \end{aligned} \tag{7}$$

Из последнего равенства видно, что $x^\alpha_\beta = x^\alpha_\beta(x^i, x^\gamma)$.

В выражениях (5_3) форм ω^α_i координаты x^α_i считаются независимыми переменными на произвольном главном расслоении. Функции $x^\alpha_i = x^\alpha_i(x^j, x^\gamma, x^j_k)$, рассмотренные в [3], фактически выделяют некоторое сечение.

Исходя из выражения (5_3) и условия

$$x^\alpha_j d\widetilde{x}^j_i + x^\alpha_\beta d\widetilde{x}^\beta_i = -dx^\alpha_j \widetilde{x}^j_i + dx^\alpha_\beta \widetilde{x}^\beta_i ,$$

выражения для дифференциалов dx^α_i имеют вид

$$dx^\alpha_i = -x^k_i\omega^\alpha_k - \widetilde{x}^\beta_k x^k_i dx^\alpha_\beta + x^k_i x^\alpha_{kj}\omega^j + x^k_i x^\alpha_{k\beta}\omega^\beta .$$

Используем последнюю формулу при дифференцировании форм (4_2), то есть в выражении $d\omega^{\alpha} = dx_i^{\alpha} \wedge dx^i + dx_{\beta}^{\alpha} \wedge dx^{\beta}$, тогда получим

$$d\omega^{\alpha} = x_{\delta,\varepsilon}^{\alpha} \tilde{x}_{[\beta}^{\varepsilon} x_{\gamma]}^{\delta} \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} +$$
$$+ \omega^i \wedge (\omega_i^{\alpha} - x_{ij}^{\alpha} \omega^j - x_{i\beta}^{\alpha} \omega^{\beta} + x_{\beta,l}^{\alpha} \tilde{x}_i^l \tilde{x}_{\delta}^{\beta} \omega^{\delta} + x_{\beta,\gamma}^{\alpha} \tilde{x}_i^{\gamma} \tilde{x}_{\delta}^{\beta} \omega^{\delta}),$$

где $x_{\beta,l}^{\alpha} = \dfrac{\partial x_{\beta}^{\alpha}}{\partial x^l}$, $x_{\beta,\gamma}^{\alpha} = \dfrac{\partial x_{\beta}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}}$. Учитывая симметрию функций x_{ij}^{α}, получим

$$d\omega^{\alpha} = C_{\beta\gamma}^{\alpha} \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + \omega^i \wedge \omega_i^{\alpha} +$$
$$+\omega^i \wedge (-x_{i\beta}^{\alpha} + x_{\delta,l}^{\alpha} \tilde{x}_i^l \tilde{x}_{\beta}^{\delta} + x_{\delta,\gamma}^{\alpha} \tilde{x}_i^{\gamma} \tilde{x}_{\beta}^{\delta}) \omega^{\beta}, \tag{8}$$

где (см.: [3; 4])

$$C_{\beta\gamma}^{\alpha} = x_{\delta,\varepsilon}^{\alpha} \tilde{x}_{[\beta}^{\varepsilon} \tilde{x}_{\gamma]}^{\delta}. \tag{9}$$

Выражения (8) принимают вид (3_2), если выполняется условие

$$x_{i\alpha}^{\varepsilon} = x_{\beta,j}^{\varepsilon} \tilde{x}_i^j \tilde{x}_{\alpha}^{\beta} + x_{\beta,\gamma}^{\varepsilon} \tilde{x}_i^{\gamma} \tilde{x}_{\alpha}^{\beta}. \tag{10}$$

Выражая из соотношения (9) проальтернированные производные $x_{\delta,\varepsilon}^{\alpha}$, получим

$$x_{[\delta,\varepsilon]}^{\alpha} = C_{\beta\gamma}^{\alpha} x_{\varepsilon}^{\beta} x_{\delta}^{\gamma}. \tag{11}$$

Будем считать, что производные функций $x_{\beta}^{\alpha} = x_{\beta}^{\alpha}(x^i, x^{\gamma})$ удовлетворяют условиям (11).

Утверждение 1. *Формы ω^{α} (4_2) удовлетворяют структурным уравнениям (3_2), если формы ω_i^{α} имеют вид (5_3), причем функции $x_{i\alpha}^{\varepsilon}$ выражаются по формуле (10).*

2. Деривационные формулы. Векторы репера $e=\{e_i, e_\alpha\}$ касательного пространства $TG_r(M_n)$, двойственные к корепеpу $\omega=\{\omega^i, \omega^\alpha\}$, в натуральном репере $\{\partial_i, \partial_\alpha\}$ имеют следующий вид [3]:

$$e_\alpha = \tilde{x}^\beta_\alpha \partial_\beta, \;\; e_i = \tilde{x}^j_i \partial_j + \tilde{x}^\alpha_i \partial_\alpha. \qquad (12)$$

Продифференцируем векторы (12):

$$\begin{aligned} de_\alpha &= d\tilde{x}^\beta_\alpha \partial_\beta + \tilde{x}^\beta_\alpha d(\partial_\beta), \\ de_i &= d\tilde{x}^j_i \partial_j + \tilde{x}^j_i d(\partial_j) + d\tilde{x}^\gamma_i \partial_\gamma + \tilde{x}^\gamma_i d(\partial_\gamma). \end{aligned} \qquad (13)$$

Учитывая в уравнениях (13) выражения дифференциалов обратных матриц

$$d\tilde{x}^j_i = \omega^k_i \tilde{x}^j_k + x^l_{ik} \tilde{x}^j_l \omega^k,$$

$$d\tilde{x}^\alpha_i = \tilde{x}^\alpha_\delta \omega^\delta_i - \tilde{x}^\alpha_\delta x^\delta_j d\tilde{x}^j_i - \tilde{x}^\alpha_\delta x^\delta_{ij} \omega^j - \tilde{x}^\alpha_\delta x^\delta_{i\beta} \omega^\beta,$$

имеем уравнения (см., напр.: [1; 2])

$$de_\alpha = e_{\alpha i} \omega^i + (e_{\alpha\beta} + C^\varepsilon_{\alpha\beta} e_\varepsilon) \omega^\beta,$$

$$de_i - e_j \omega^j_i - e_\alpha \omega^\alpha_i = e_{ij} \omega^j + e_{i\alpha} \omega^\alpha,$$

где пфаффовы (неголономные) производные векторов e_i, e_α имеют вид (ср.: [3])

$$\begin{aligned} e_{\alpha i} &= \tilde{x}^\beta_\alpha \tilde{x}^j_i \partial^2_{\beta j} + \tilde{x}^\beta_\alpha \tilde{x}^\gamma_i \partial^2_{\beta\gamma} - (x^\varepsilon_{\delta,\beta} \tilde{x}^\delta_\alpha \tilde{x}^\beta_i + x^\varepsilon_{\delta,j} \tilde{x}^\delta_\alpha \tilde{x}^j_i) e_\varepsilon, \\ e_{\alpha\beta} &= \tilde{x}^\delta_\alpha \tilde{x}^\gamma_\beta \partial^2_{\delta\gamma} - x^\varepsilon_{\nu,\gamma} \tilde{x}^\nu_{(\alpha} \tilde{x}^\gamma_{\beta)} e_\varepsilon, \\ e_{ij} &= x^k_{ij} e_k + \tilde{x}^k_i \tilde{x}^l_j \partial^2_{kl} + \tilde{x}^k_i \tilde{x}^\alpha_j \partial^2_{k\alpha} + \\ &\quad + \tilde{x}^\beta_i \tilde{x}^l_j \partial^2_{\beta l} + \tilde{x}^\alpha_i \tilde{x}^\beta_j \partial^2_{\alpha\beta} - x^\alpha_{ij} e_\alpha, \\ e_{i\alpha} &= \tilde{x}^j_i \tilde{x}^\beta_\alpha \partial^2_{j\beta} + \tilde{x}^\gamma_i \tilde{x}^\beta_\alpha \partial^2_{\gamma\beta} - x^\beta_{i\alpha} e_\beta. \end{aligned} \qquad (14)$$

В силу леммы Картана для векторов 2-го порядка должны выполняться условия симметрии $e_{ij}=e_{ji}, e_{i\alpha}=e_{\alpha i}, e_{\alpha\beta}=e_{\beta\alpha}$. Векторы e_{ij}, $e_{\alpha\beta}$ симметричны в силу равенства смешанных производных и симметрии функций x^i_{jk}, x^α_{ij}, $x^\alpha_{\beta\gamma}$. Если сравнить (14$_1$) с (14$_4$), то при выполнении условий (11) действительно получаем $e_{i\alpha}=e_{\alpha i}$.

Утверждение 2. *Координатные выражения (14$_1$, 14$_4$) векторов $e_{i\alpha}, e_{\alpha i}$, полученные при дифференцировании касательных векторов (12), равны, если функции $x^\varepsilon_{i\alpha}$ выражаются по формуле (10).*

3. Структурные константы. Сравним координатное выражение (5$_4$) для форм ω^α_β с их бескоординатным выражением (6). Выразим все формы через дифференциалы базисных и слоевых координат:

$$-\tilde{x}^\gamma_\beta(x^\alpha_{\gamma,\delta}dx^\delta+x^\alpha_{\gamma,i}dx^i)+x^\alpha_{\beta\gamma}(x^\gamma_\delta dx^\delta+x^\gamma_i dx^i)+$$
$$+x^\alpha_{\beta j}x^j_i dx^i=C^\alpha_{\beta\gamma}(x^\gamma_\delta dx^\delta+x^\gamma_i dx^i).$$

Выпишем слагаемые при дифференциалах dx^δ:

$$\tilde{x}^\gamma_\beta x^\alpha_{\gamma,\delta}=(x^\alpha_{\beta\gamma}-C^\alpha_{\beta\gamma})x^\gamma_\delta,$$

откуда приходим к формуле

$$x^\alpha_{\beta\gamma}=x^\alpha_{\delta,\varepsilon}\tilde{x}^\varepsilon_{(\beta}\tilde{x}^\delta_{\gamma)}. \tag{15}$$

Сравнивая подобные слагаемые при дифференциалах dx^i, получаем выражения

$$\tilde{x}^\gamma_\beta x^\alpha_{\gamma,i}=(x^\alpha_{\beta\gamma}-C^\alpha_{\beta\gamma})x^\gamma_i+x^\alpha_{\beta i},$$

которые тождественно выполняются при условиях (11), (15).

Утверждение 3. *Координатное (5_4) и бескоординатное (6) выражения для форм ω^α_β совпадают, если функции $x^\alpha_{\beta\gamma}$ имеют вид (15).*

Замечание 1. При выполнении (9, 10, 15) соотношения (7) принимают вид

$$dx^\alpha_\beta = x^\alpha_{\beta,i}dx^i + x^\alpha_{\beta,\gamma}dx^\gamma .$$

Найдем выражения для дифференциалов выражений (9):

$$dC^\alpha_{\beta\gamma} = (x^\alpha_{\delta,\varepsilon i}dx^i + x^\alpha_{\delta,\varepsilon\nu}dx^\nu)\tilde{x}^\varepsilon_{[\beta}\tilde{x}^\delta_{\gamma]} + x^\alpha_{\delta,\varepsilon}(d\tilde{x}^\varepsilon_{[\beta}\tilde{x}^\delta_{\gamma]} + \tilde{x}^\varepsilon_{[\beta}d\tilde{x}^\delta_{\gamma]}). \quad (16)$$

С использованием формулы (5_4) выражения для дифференциалов $d\tilde{x}^\varepsilon_\beta$ примут вид

$$d\tilde{x}^\varepsilon_\beta = \omega^\alpha_\beta\tilde{x}^\varepsilon_\alpha - x^\alpha_{\beta i}\tilde{x}^\varepsilon_\alpha\omega^i - x^\alpha_{\beta\gamma}\tilde{x}^\varepsilon_\alpha\omega^\gamma . \quad (17)$$

Учитывая формулу (17) в уравнениях (16), а также группируя подобные слагаемые при базисных и слоевых формах, получим

$$dC^\alpha_{\beta\gamma} = C^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}\omega^\varepsilon + C^\alpha_{\beta\gamma i}\omega^i ,$$

где

$$C^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon} = x^\alpha_{\delta,\mu\nu}\tilde{x}^\nu_\varepsilon\tilde{x}^\mu_{[\beta}\tilde{x}^\delta_{\gamma]} - x^\delta_{\mu,\nu}\tilde{x}^\nu_\varepsilon(C^\alpha_{\delta\gamma}\tilde{x}^\mu_\beta + C^\alpha_{\beta\delta}\tilde{x}^\mu_\gamma),$$

$$C^\alpha_{\beta\gamma i} = x^\alpha_{\delta,\varepsilon j}\tilde{x}^j_i\tilde{x}^\varepsilon_{[\beta}\tilde{x}^\delta_{\gamma]} + x^\alpha_{\delta,\mu\nu}\tilde{x}^\nu_i\tilde{x}^\mu_{[\beta}\tilde{x}^\delta_{\gamma]} -$$
$$-(x^\delta_{\mu,j}\tilde{x}^j_i + x^\delta_{\mu,\nu}\tilde{x}^\nu_i)(C^\alpha_{\delta\gamma}\tilde{x}^\mu_\beta + C^\alpha_{\beta\delta}\tilde{x}^\mu_\gamma).$$

Замечание 2. Уравнения на структурные константы можно привести к следующему виду [6, с. 29]:

$$dC^\alpha_{\beta\gamma} - C^\alpha_{\delta\gamma}\omega^\delta_\beta - C^\alpha_{\beta\delta}\omega^\delta_\gamma = \overline{C}^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon}\omega^\varepsilon + C^\alpha_{\beta\gamma i}\omega^i , \quad (18)$$

где

$$\overline{C}^\alpha_{\beta\gamma\varepsilon} = x^\alpha_{\delta,\mu\nu}\tilde{x}^\nu_\varepsilon\tilde{x}^\mu_{[\beta}\tilde{x}^\delta_{\gamma]}.$$

В формуле (18) тензор для оператора Δ непосредственно не образуется.

Если $C^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} = 0$, $C^{\alpha}_{\beta\gamma i} = 0$, то $dC^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$, следовательно, $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — константы. Выражая из соотношений $C^{\alpha}_{\beta\gamma\varepsilon} = 0$ и $C^{\alpha}_{\beta\gamma i} = 0$ проальтернированные производные второго порядка $x^{\alpha}_{\delta,\varepsilon\nu}$ и $x^{\alpha}_{\delta,\varepsilon i}$, получим

$$
\begin{aligned}
x^{\alpha}_{[\delta,\varepsilon]\nu} &= C^{\alpha}_{\beta\gamma}(x^{\beta}_{\varepsilon,\nu}x^{\gamma}_{\delta} + x^{\gamma}_{\delta,\nu}x^{\beta}_{\varepsilon}),\\
x^{\alpha}_{[\delta,\varepsilon]i} &= C^{\alpha}_{\beta\gamma}(x^{\beta}_{\varepsilon,i}x^{\gamma}_{\delta} + x^{\gamma}_{\delta,i}x^{\beta}_{\varepsilon}).
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Формулы (19) получаются также непосредственно при дифференцировании функций (11).

Утверждение 4. *Если проальтернированные производные* $x^{\alpha}_{[\delta,\varepsilon]}$ *функций* $x^{\alpha}_{\delta} = x^{\alpha}_{\delta}(x^{i}, x^{\gamma})$ *имеют вид (11), то* $dC^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$, *т. е.* $C^{\alpha}_{\beta\gamma} = const$.

Список литературы

1. *Полякова К.В., Шевченко Ю.И.* Способ Лаптева — Лумисте задания связности и горизонтальные векторы // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2012. Вып. 43. С. 114—121.

2. *Рязанов Н.А.* Скобка Ли касательных векторов и тождества Бьянки в главном расслоении // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2014. Вып. 45. С. 113—120.

3. *Рязанов Н.А.* Реперы 1-го и 2-го порядка на главном расслоении // Там же. 2015. Вып. 46. С. 129—136.

4. *Катанаев М.О.* Геометрические методы в математической физике. М., 2011.

5. *Шапуков Б.Н.* Линейные связности векторного расслоения // Тр. геом. семин. Казань, 1975. Т. 8. С. 118—131.

6. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий : учеб. пособие. Калининград, 1998.

N. Ryazanov

On basic and fiber forms of principal bundle

The research principal bundle developed in [2, 3] are continued. Based on the structure Laptev equations, structure equations of arbitrary principal bundle are built internally, i. e. coordinate expression for its basic and fiber forms are found.

УДК 514.76

***Л. В. Степанова*[1], *Г. А. Банару*[2]**
[1]*Смоленский филиал МИИТ,* [2]*Смоленский государственный университет*
lide@yandex.ru[1]; mihail.banaru@yahoo.com[2]

О почти контактной метрической структуре на вполне омбилической гиперповерхности келерова многообразия

Доказано, что квазисасакиева структура на вполне омбилической гиперповерхности келерова многообразия размерности не ниже шести является сасакиевой.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, квазисасакиева структура, сасакиева структура, вполне омбилическая гиперповерхность, келерово многообразие.

1. Давно известно, что на вполне геодезической гиперповерхности келерова многообразия индуцируется косимплектическая структура. Кто именно это установил первым — сказать трудно. Из построений выдающегося американского геометра Д. Блэра [1] этот факт следует также непосредственно,