УДК 514.76

***Н. А. Елисеева*[1], *Ю. И. Попов*[2]**
[1] *Калининградский государственный технический университет, Россия*
[2] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
[1] ne2705@gmail.com, [2] yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-8

Гиперполосное распределение, оснащенное полем сопряженных плоскостей

Рассматривается гиперполосное распределение аффинного пространства, оснащенное полем сопряженных плоскостей относительно асимптотического пучка тензоров базисной поверхности. Приведено задание изучаемого гиперполосного распределения в аффинном пространстве относительно репера 1-го порядка и доказана теорема существования. Построены инвариантные поля геометрических объектов 1-го и 2-го порядка. В дифференциальной окрестности 2-го порядка построены поля нормалей Трансона 1-го и 2-го рода. Найдены условия совпадения нормалей Трансона и нормалей Бляшке.

Ключевые слова: гиперполоса, регулярная гиперполоса, гиперполосное распределение, аффинное пространство, нормализация

§ 1. Задание гиперполосного распределения, оснащенного полем сопряженных плоскостей, в n-мерном аффинном пространстве A_n

В работе используется следующая схема индексов:

$$J, K, L = \overline{1, n};\ i, j, k = \overline{1, m};\ p, q, r, s, t = \overline{1, r};\ a, b, c, d = \\ = \overline{r+1, m};\ \alpha, \beta = \overline{m+1, n-1};\ \hat{\alpha}, \hat{\beta} = \overline{m+1, n}.$$

Поступила в редакцию 8.05.2023 г.

Обзор работ по теории гиперполос в трехмерных пространствах с фундаментальными группами дан в статье А. В. Столярова [12]. В.В. Вагнер [4] обобщил введенное В. Бляшке [3] понятие полосы: m-мерной гиперполосой H_m в n-мерном центроаффинном пространстве A_n^0 он называет поверхность V_m $(m < n-1)$, оснащенную полем касательных гиперплоскостей. При этом поверхность V_m называется базисной поверхностью гиперполосы H_m, а касательное оснащение гиперплоскости — главными касательными гиперплоскостями гиперполосы H_m.

В настоящей работе используются метод внешних дифференциальных форм Э. Картана [2; 14; 16] и теоретико-групповой метод Г.Ф. Лаптева [5; 7].

Рассмотрим гиперполосное распределение [13] аффинного пространства A_n [15], для которого в каждом центре A базисной поверхности V_m заданы r-мерная плоскость $\Lambda_r \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda$ и сопряженная ей $(m-r)$-мерная плоскость $L_{m-r} \stackrel{\text{def}}{=} L$ относительно асимптотического пучка тензоров базисной поверхности V_m. Такой специальный класс гиперполосных распределений аффинного пространства A_n будем обозначать символом $H_m(Z)$. Отнесем n-мерное аффинное пространство A_n к подвижному реперу $R = \{M, \bar{e}_J\}$, дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид

$$dM = \omega^J \bar{e}_J, d\bar{e}_J = \omega_J^K \bar{e}_K,$$

где $d\omega^J = \omega^L \wedge \omega_L^J, d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K$.

Совместим вершину M репера R с текущей точкой A базисной поверхности V_m. Векторы $\{\bar{e}_p\}$ поместим в касательную плоскость $\Lambda(A)$, а векторы $\{\bar{e}_a\}$ — в $(m-r)$-мерную плоскость $L(A)$. Векторы $\{\bar{e}_\alpha\}$ расположим в характеристике $X_{n-m-1}(A)$ гиперполосного распределения $H_m(Z)$, а вектор $\bar{e}_n$ пусть занимает произвольное положение, образуя с векторами $\{\bar{e}_p, \bar{e}_a, \bar{e}_\alpha\}$ репер $\{A, \bar{e}_J\}$ пространства A_n. Выбранный таким образом репер является репером 1-го порядка R^1, относительно которого гиперполосное распределение $H_m(Z)$ задается следующими уравнениями и соотношениями:

$$\omega^n = 0,\ \omega^\alpha = 0,\ \omega^n_\alpha = 0,$$

$$\omega^n_p = b^n_{pq}\omega^q,\ \omega^n_a = b^n_{ab}\omega^b, \quad \text{(a)}$$

$$\omega^\alpha_p = b^\alpha_{pq}\omega^q,\ \omega^\alpha_a = b^\alpha_{ab}\omega^b,\ \omega^a_p = \lambda^a_{pi}\omega^i, \quad (1.1)$$

$$\omega^p_a = \lambda^p_{ai}\omega^i,\ \omega^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha i}\omega^i,\ \omega^p_\alpha = \lambda^p_{\alpha i}\omega^i;$$

$$\nabla b^n_{pq} = b^n_{pqi}\omega^i,\ \nabla b^n_{ab} = b^n_{abi}\omega^i, \quad \text{(b)}$$

$$\nabla b^\alpha_{pq} + b^n_{pq}\omega^\alpha_n = b^\alpha_{pqi}\omega^i,\ \nabla b^\alpha_{ab} + b^n_{ab}\omega^\alpha_n = b^\alpha_{abi}\omega^i, \quad (1.2)$$

$$\nabla\lambda^a_{pi} + b^n_{pq}\delta^q_i\omega^a_n = \lambda^\alpha_{pij}\omega^j,\ \nabla\lambda^p_{ai} + b^n_{ac}\delta^c_i\omega^p_n = \lambda^p_{aij}\omega^j,$$

$$\nabla\lambda^a_{\alpha i} = \lambda^a_{\alpha ij}\omega^j,\ \nabla\lambda^p_{\alpha i} = \lambda^p_{\alpha ij}\omega^j;$$

где

$$b^{\hat\alpha}_{[pq]} = 0,\ b^{\hat\alpha}_{[ab]} = 0,\ \lambda^k_{\alpha[i}b^n_{j]k} = 0. \quad (1.3)$$

В дальнейшем будем изучать только регулярные гиперполосные распределения $H_m(Z)$, то есть такие гиперполосные распределения, для которых характеристика $X_{n-m-1}(A)$ и касательная плоскость $T_m(A)$ находятся в общем положении:

$$X_{n-m-1}(A) \cap T_m(A) = A, [X_{n-m-1}(A), T_m(A)] = \tau(A).$$

Известно [1], что необходимым и достаточным условием сопряженности плоскостей $\Lambda(A)$ и $L(A)$ является обращение в нуль тензора $\{b^{\hat\alpha}_{pa}\}$, то есть $b^{\hat\alpha}_{pa} = 0$ и $b^{\hat\alpha}_{ap} = 0$.

Из (1.1.a) и (1.2) следует, что система функций b^n_{ij} образует невырожденный тензор 1-го порядка — основной фундаментальный тензор гиперполосного распределения $H_m(Z)$, который распадается на два невырожденных симметрических тензора 1-го порядка b^n_{pq} и b^n_{ab}. Назовем тензор 1-го порядка b^n_{pq} главным фундаментальным тензором гиперполосного распределения $H_m(Z)$, ассоциированным с расслоением $\Lambda(V_m)$, а тензор b^n_{ab} — главным фундаментальным тензором гиперполосного распределения $H_m(Z)$, ассоциированным с расслоением $L(V_m)$.

Замечание. Расслоение $\Lambda(V_m)$ плоскостей $\Lambda(A)$ и расслоение $L(V_m)$ плоскостей $L(A)$ в дальнейшем будем соответственно называть Λ-подрасслоением и L-подрасслоением, а расслоение касательных плоскостей $T(V_m)$ назовем T-подрасслоением гиперполосного распределения $H_m(Z)$.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Регулярное гиперполосное распределение* $H_m(Z)$ *в репере 1-го порядка задается дифференциальными уравнениями (1.1), (1.2) и соотношениями (1.3).*

§ 2. Теорема существования

Теорема 2. *В аффинном пространстве* A_n *гиперполосное распределение* $H_m(Z)$ *существует и определяется с произволом* $2r(m-r)+(n-m)+m(n-m-1)$ *функций* m *аргументов.*

Доказательство. Все уравнения, входящие в чистое замыкание системы (1.1), можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\Delta b^n_{pq}\wedge\omega^q=0,\ \Delta\lambda^a_{pi}\wedge\omega^i=0,\\
&\Delta b^n_{ab}\wedge\omega^b=0,\ \Delta\lambda^p_{ai}\wedge\omega^i=0,\\
&\Delta b^\alpha_{pq}\wedge\omega^q=0,\ \Delta\lambda^a_{\alpha i}\wedge\omega^i=0,\\
&\Delta b^\alpha_{ab}\wedge\omega^b=0,\ \Delta\lambda^p_{\alpha i}\wedge\omega^i=0,
\end{aligned}\tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Delta b^n_{pq}=\nabla b^n_{pq},\ \ \Delta\lambda^a_{pi}=\nabla\lambda^a_{pi}+b^n_{pq}\delta^q_i\omega^a_n,\\
&\Delta b^n_{ab}=\nabla b^n_{ab},\ \ \Delta\lambda^p_{ai}=\nabla\lambda^p_{ai}+b^n_{ac}\delta^c_i\omega^p_n,\\
&\Delta b^\alpha_{pq}=\nabla b^\alpha_{pq}+b^n_{pq}\omega^\alpha_n,\ \ \Delta\lambda^a_{\alpha i}=\nabla\lambda^a_{\alpha i},\\
&\Delta b^\alpha_{ab}=\nabla b^\alpha_{ab}+b^n_{ab}\omega^\alpha_n,\ \ \Delta\lambda^p_{\alpha i}=\nabla\lambda^p_{\alpha i}.
\end{aligned}$$

Исследуем систему (2.1). Количество независимых функций, входящих в эту систему, равно

$$q = m^2 + 2m^2(n - m - 1) + 2r\,m(m - r).$$

Введем обозначения: $A = 2sr + m(n - m - 1)$, $s = m - r$.

Найдем характеры системы (2.1):

$$S_1 = rangM_1 = r(n - m) + s(n - m) + A,$$

$$S_2 = rangM_2 - rangM_1 = (r - 1)(n - m) + (s - 1)(n - m) + A,$$

$$S_3 = (r - 2)(n - m) + (s - 2)(n - m) + A,$$

$$\dots$$

$$S_r = 1(n - m) + (m - 2r + 1)(n - m) + A,$$

$$S_{r+1} = (m - 2r)(n - m) + A,$$

$$\dots$$

$$S_m = 1(n - m) + A.$$

Подсчитаем число Картана для системы (2.1):

$$Q = S_1 + 2S_2 + 3S_3 + \dots + mS_m =$$

$$= r(n - m)\frac{r(1 + r)}{2} + s(n - m)\frac{s(1 + s)}{2} +$$

$$+2rs\frac{m(1 + m)}{2} + m\frac{m(1 + m)}{2}(n - m - 1).$$

Разрешим систему (2.1) по лемме Картана:

$$\begin{gathered} \Delta b^n_{pq} = b^n_{pqt}\omega^t, \Delta\lambda^a_{pi} = \lambda^a_{pij}\omega^j, \\ \Delta b^\alpha_{pq} = b^\alpha_{pqt}\omega^t, \Delta\lambda^p_{ai} = \lambda^p_{aij}\omega^j, \\ \Delta b^n_{ab} = b^n_{abc}\omega^c, \Delta\lambda^a_{\alpha i} = \lambda^a_{\alpha ij}\omega^j, \\ \Delta b^\alpha_{ab} = b^\alpha_{abc}\omega^c, \Delta\lambda^p_{\alpha i} = \lambda^p_{\alpha ij}\omega^j. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Найдем число линейно независимых функций, стоящих в правых частях системы (2.2):

$$N = r(n-m)\frac{r(1+r)}{2} + s(n-m)\frac{s(1+s)}{2} +$$

$$+2rs\frac{m(1+m)}{2} + m\frac{m(1+m)}{2}(n-m-1).$$

Таким образом, $Q = N$. Данная система находится в инволюции [2; 14; 16]. Следовательно, в аффинном пространстве A_n гиперполосное распределение $H_m(Z)$ существует и определяется с произволом $2r(m-r) + (n-m) + m(n-m-1)$ функций m аргументов.

§ 3. Построение инвариантных полей геометрических объектов 1-го и 2-го порядка гиперполосного распределения $H_m(Z)$

Для невырожденных тензоров b^n_{pq} и b^n_{ab} (§ 1) можно построить обратные им тензоры b^{pq}_n и b^{ab}_n, компоненты которых удовлетворяют условиям

$$b^n_{pq}b^{qt}_n = \delta^t_p, \ \nabla b^{qt}_n + b^{qs}_n b^{tr}_n b^n_{sri}\omega^i = 0, \tag{3.1}$$

$$b^n_{ab}b^{bc}_n = \delta^c_a, \nabla b^{bc}_n + b^{ba}_n b^{cd}_n b^n_{adi}\omega^i = 0.$$

Построим геометрические объекты 1-го порядка, ассоциированные с Λ-, L-подрасслоениями гиперполосного распределения $H_m(Z)$:

$$\Lambda^\alpha_n = \frac{1}{r} b^\alpha_{pq} b^{pq}_n, \ \ L^\alpha_n = \frac{1}{m-r} b^\alpha_{ab} b^{ab}_n,$$

удовлетворяющие в силу (1.2.b) и (3.1) уравнениям

$$\nabla\Lambda^\alpha_n + \omega^\alpha_n = \Lambda^\alpha_{ni}\omega^i, \ \ \nabla L^\alpha_n + \omega^\alpha_n = L^\alpha_{ni}\omega^i. \tag{3.2}$$

Предварительно заметим, что, замыкая уравнения (1.2.b), получим

$$\nabla b^n_{pqi} - b^n_{sq} b^n_{pi} \omega^s_n - b^n_{ps} b^n_{qi} \omega^s_n - b^n_{pq} b^n_{ij} \omega^j_n = b^n_{pqij} \omega^j \quad (3.3)$$

$$\nabla b^n_{abi} - b^n_{cb} b^n_{ai} \omega^c_n - b^n_{ac} b^n_{bi} \omega^c_n - b^n_{ab} b^n_{ij} \omega^j_n = b^n_{abij} \omega^j.$$

Введем [9] в рассмотрение функции 2-го порядка:

$$B_i = b^n_{pqi} b^{pq}_n, \; b_i = b^n_{abi} b^{ba}_n,$$

для которых в силу (1.2.b), (3.1), (3.3) выполняются условия

$$\nabla B_i = 2 b^n_{pi} \omega^p_n + r b^n_{ij} \omega^j_n + B_{ij} \omega^j, \quad (3.4)$$

$$\nabla b_i = 2 b^n_{ai} \omega^a_n + (m-r) b^n_{ij} \omega^j_n + b_{ij} \omega^j.$$

Составим величины

$$F_p \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{r+2} b^n_{sqp} b^{qs}_n = \frac{1}{r+2} B_p, \; t_p \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{m-r} b^n_{abp} b^{ba}_n = \frac{1}{s} b_p, \quad (3.5)$$

$$F_a \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{r} b^n_{pqa} b^{qp}_n = \frac{1}{r} B_a, \; t_a \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{s+2} b^n_{cba} b^{bc}_n = \frac{1}{s+2} b_a,$$

удовлетворяющие в силу (3.4) уравнениям

$$\nabla F_p = b^n_{ps} \omega^s_n + F_{pi} \omega^i, \nabla t_p = b^n_{pq} \omega^q_n + t_{pi} \omega^i, \quad (3.6)$$

$$\nabla F_a = b^n_{ac} \omega^c_n + F_{ai} \omega^i, \nabla t_a = b^n_{ac} \omega^c_n + t_{ai} \omega^i.$$

Величины 2-го порядка $F_i = \{F_p, F_a\}$ и $t_i = \{t_p, t_a\}$, согласно (3.6), удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\nabla F_i = b^n_{ij} \omega^j_n + F_{ij} \omega^j, \nabla t_i = b^n_{ij} \omega^j_n + t_{ij} \omega^j.$$

Используя величины 2-го порядка (3.5), построим [9] геометрические объекты следующего вида:

$$F^p_n = -b^{pq}_n F_q, \; t^p_n = -b^{pq}_n t_q,$$

$$F^a_n = -b^{ab}_n F_b, \; t^a_n = -b^{ab}_n t_b,$$

где

$$\nabla F_n^p + \omega_n^p = F_{ni}^p \omega^i, \;\; \nabla t_n^p + \omega_n^p = t_{ni}^p \omega^i, \tag{3.7}$$

$$\nabla F_n^a + \omega_n^a = F_{ni}^a \omega^i, \;\; \nabla t_n^a + \omega_n^a = t_{ni}^a \omega^i.$$

Геометрические объекты F_n^p, F_n^a, t_n^p, t_n^a порождают в дифференциальной окрестности 2-го порядка квазитензоры:

$$F_n^i = \{F_n^a, F_n^p\}, \nabla F_n^i + \omega_n^i = F_{nj}^i \omega^j, \tag{3.8}$$

$$t_n^i = \{t_n^a, t_n^p\}, \nabla t_n^i + \omega_n^i = t_{nj}^i \omega^j.$$

В результате имеет место теорема 3.

Теорема 3. *В дифференциальной окрестности 1-го порядка поля (3.2) квазитензоров $\{\Lambda_n^\alpha\}$, $\{L_n^\alpha\}$ задают, соответственно, поля нормалей 1-го рода распределения характеристик гиперполосного распределения $H_m(Z)$.*

Поля (3.7), (3.8) квазитензоров $\{F_n^p\}$, $\{t_n^p\}$, $\{F_n^a\}$,$\{t_n^a\}$, $\{F_n^i\}$, $\{t_n^i\}$ задают в дифференциальной окрестности 2-го порядка соответственно поля нормалей 1-го рода Λ-, L-, T-подрасслоений гиперполосного распределения $H_m(Z)$.

§ 4. Нормализация Трансона гиперполосного распределения $H_m(Z)$

Согласно теореме Трансона [6], для регулярных гиперполос аффинные нормали всех плоских сечений гиперповерхности V_{n-1}^r $(r+1)$-мерными плоскостями, проходящими через плоскость $\Lambda(A)$, лежат в $(n-r)$-мерной плоскости $T_{n-r}(A) = \left[A, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_a, \bar{e}_n + +T_n^p \bar{e}_p\right]$, то есть в нормали Трансона Λ-подрасслоения. Аналогичным образом нормалью Трансона Λ-подрасслоения оснащенного гиперполосного распределения $H_m(Z)$ является $(n-s)$-мерная плоскость $T_{n-s}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_p, \bar{e}_n + T_n^a \bar{e}_a]$, где $s = m - r$.

Введем в рассмотрение квазитензоры $\{T_n^i\} \stackrel{\text{def}}{=} \{T_n^a, T_n^p\}, \{\lambda_n^\alpha\}$:

$$\nabla T_n^i + \omega_n^i = T_{nj}^i \omega^j, \quad \nabla \lambda_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \lambda_{nj}^\alpha \omega^j, \qquad (4.1)$$

где

$$T_n^p \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{r+2} b_n^{st} b_{stq}^n b_n^{qp}, \quad T_n^a \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{s+1} b_n^{db} b_{dbc}^n b_n^{ca}, \qquad (4.2)$$

$$\lambda_n^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m}(b_n^{pq}\lambda_{pq}^\alpha + b_n^{ab}\lambda_{ab}^\alpha).$$

Определение 1. *Нормалью Трансона гиперполосного распределения* $H_m(Z)$ назовем $(n-m)$-мерную плоскость $T_{n-m}(A) = T_{n-r}(A) \cap T_{n-s}(A)$ — плоскость пересечения нормалей Трансона Λ-, L-подрасслоений. Прямую $T_1(A) = [A,\ \bar{T}_n]$, где $\bar{T}_n = T_n^p \bar{e}_p + T_n^a \bar{e}_a + \lambda_n^\alpha \bar{e}_\alpha + \bar{e}_n$, назовем *прямой Трансона гиперполосного распределения* $H_m(Z)$ в точке A.

Из определения 1 вытекает строение нормали Трансона гиперполосного распределения $H_m(Z)$: $T_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, \bar{T}_n]$.

Известно [10], что между нормалями 1-го и 2-го рода гиперполосного распределения $H_m(Z)$ существует соответствие Бомпьяни — Пантази

$$\nu_i = b_{ik}^n \nu_n^k + t_i, \quad \nabla \nu_i = \nu_{ik}\omega^k.$$

Определение 2. Нормаль 2-го рода гиперполосного распределения $H_m(Z)$, определяемую квазитензором

$$T_i = b_{ik}^n T_n^k + t_i, \nabla T_i = T_{ik}\omega^k, \qquad (4.3)$$

назовем *нормалью Трансона 2-го рода гиперполосного распределения* $H_m(Z)$.

Уравнение (4.2) можно расписать на две группы уравнений, ассоциированных соответственно с Λ-, L-подрасслоениями:

$$T_p = b_{pq}^n T_n^q + t_p, \ \nabla T_p = T_{pk}\omega^k, \qquad (4.4)$$

$$T_a = b_{ac}^n T_n^c + t_a, \ \nabla T_a = T_{ak}\omega^k. \qquad (4.5)$$

Из дифференциальных уравнений (4.1)—(4.5), согласно приведенным выше определениям вытекает теорема 4.

Теорема 4. *Поля геометрических объектов* $\{T_n^i, T_i\}$, $\{T_n^p, T_p\}$, $\{T_n^a, T_a\}$ *задают в дифференциальной окрестности 2-го порядка поля нормализаций в смысле Трансона гиперполосного распределения* $H_m(Z)$ *и* Λ-, L-*подрасслоений соответственно. При этом нормализация Трансона* $\{T_n^i, T_i\}$ *гиперполосного распределения* $H_m(Z)$ *порождает нормализации Трансона* Λ-, L-*подрасслоений. Верно и обратное утверждение.*

Выясним условия совпадения [11] нормалей Трансона $T_{n-m}(A)$ и Бляшке $B_{n-m}(A)$ гиперполосного распределения $H_m(Z)$.

Нормаль Бляшке [3; 4] $B_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, \bar{b}_n]$ гиперполосного распределения $H_m(Z)$, где $\bar{b}_n = b_n^p \bar{e}_p + b_n^a \bar{e}_a + \lambda_n^\alpha \bar{e}_\alpha + \bar{e}_n$, в дифференциальной окрестности 2-го порядка определяется квазитензорами $\{b_n^p, b_n^a, \lambda_n^\alpha\}$:

$$b_n^p = -\frac{1}{m-r} b_n^{bd} b_{bdq}^n b_n^{qp}, \quad b_n^a = -\frac{1}{r} b_n^{pq} b_{pqc}^n b_n^{ca}. \qquad (4.6)$$

Прямую $B_1(A) = \left[A,\ \bar{b}_n\right]$ назовем прямой Бляшке гиперполосного распределения $H_m(Z)$ в точке A. Тогда нормаль Бляшке $B_{n-m}(A)$ в каждой точке A натянута на характеристику $X_{n-m-1}(A)$ и прямую Бляшке $B_1(A)$, то есть $B_{n-m}(A) =$ $= [B_1(A), X_{n-m-1}(A)]$.

Пусть нормаль Трансона $T_{n-m}(A)$ гиперполосного распределения $H_m(Z)$ совпадает с нормалью Бляшке $B_{n-m}(A)$. Тогда $\bar{T}_n = \bar{b}_n$, что равносильно условиям $T_n^p = b_n^p$, $T_n^a = b_n^a$. Используя (4.2), (4.6), запишем:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{m-r} b_n^{bd} b_{bdq}^n b_n^{qp} = -\dfrac{1}{r+2} b_n^{st} b_{stq}^n b_n^{qp}, \\ -\dfrac{1}{r} b_n^{pq} b_{pqc}^n b_n^{ca} = -\dfrac{1}{s+2} b_n^{bd} b_{bdc}^n b_n^{ca}, \end{cases}$$

что равносильно соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m-r} b_n^{bd} b_{bdp}^n = \dfrac{1}{r+2} b_n^{st} b_{stp}^n, \\ \dfrac{1}{r} b_n^{pq} b_{pqa}^n = \dfrac{1}{s+2} b_n^{cd} b_{cda}^n. \end{cases}$$

Учитывая (3.5), получим

$$\begin{cases} F_p = t_p, \\ F_a = t_a. \end{cases} \Leftrightarrow F_i = t_i. \tag{4.7}$$

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 5. *Нормаль Трансона $T_{n-m}(A)$ гиперполосного распределения $H_m(Z)$ совпадает с нормалью Бляшке $B_{n-m}(A)$ [6] тогда и только тогда, когда выполняются условия (4.7).*

Список литературы

1. *Акивис М.А.* О строении двухкомпонентных сопряженных систем // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 7—31.
2. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Эли Картан (1869—1951). М., 2014.
3. *Бляшке В.* Введение в дифференциальную геометрию. М., 1957.
4. *Вагнер В.В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семин. по векторнрму и тензорному анализу. М., 1950. Вып. 8. С. 197—272.
5. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.
6. *Лисицына И.Е.* Нормализация Тренсона гиперполосы $\mathrm{H_m}$ аффинного пространства // ДГМФ. 1998. Вып. 29. С. 38—40.
7. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 4. С. 7—70.
8. *Попов Ю.И.* Гиперполосное распределение аффинного пространства // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2021. Т. 203. С. 84—99.
9. *Попов Ю.И.* Гиперполосные распределения аффинного пространства. Калининград, 2021.
10. *Попов Ю.И.* Введение в теорию регулярного гиперполосного распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. № 10. С. 49—56.

11. *Попов Ю.И.* Специальные классы гиперполосного распределения аффинного пространства. Калининград, 2021.

12. *Столяров А.В.* Дифференциальная геометрия полос // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т. 10. С. 25—54.

13. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

14. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М. ; Л., 1948.

15. *An-Min L., Udo S., Guosong Zh., Zejun H.* Global Affine Differential Geometry of Hypersurfaces. De Gruyter, 2015 (Expositions in Mathematics ; vol. 11).

16. *Ivey Th.A., Landsberg J.M.* Cartan for Beginners: Differential Geometry Via Moving Frames and Exterior Differential Systems. Amer. Math. Society, 2003 (Graduate Studies in Mathematics ; vol. 61).

Для цитирования: *Елисеева Н.А., Попов Ю.И.* Гиперполосное распределение, оснащенное полем сопряженных плоскостей // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 78—91. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-8.

MSC 2010: 58A05, 53A20

N.A. Eliseeva[1], *Yu.I. Popov*[2]

[1] *Kaliningrad State Technical University*
1, Sovietsky Prosp., Kaliningrad, 236022, Russia
[2] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14, A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236041, Russia
[1] ne2705@gmail.com, [2] yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-8

Hyperband distribution equipped with a field of conjugate planes

Submitted on May 8, 2023

In this paper, we study a special class of hyperbands, i.e., a framed hyperband distribution. The study of hyperbands and their generalizations in spaces with different fundamental groups is of great interest in connection with numerous applications in mathematics and physics. A special place is occupied by regular hyperstrips, for which the characteristic planes of families of principal tangent hyperplanes do not contain directions tangent to the basal surface of the hyperstrip. In this paper, we use the method of external differential forms of E. Cartan and the group-theoretic method of G. F. Laptev.

We consider a regular hyperband distribution of an affine space equipped with a field of conjugate planes with respect to an asymptotic bundle of tensors of the basic surface. The definition of the studied hyperband distribution in the affine space with respect to the 1st order frame is given and the existence theorem is proved. A sequence of fundamental geometric objects of the 1st and 2nd order of a hyperband distribution equipped with a field of conjugate planes is constructed. Fields of quasitensors are constructed that define the fields of normals of the first kind of the distribution of the characteristics of the hyperband distribution. In a differential neighborhood of the 2nd order, the fields of Transon normals of the 1st and 2nd kind are constructed. The conditions for the coincidence of the Transon normal and the Blaschke normal are found.

Keywords: hyperband, regular hyperband, hyperband distribution, affine space, normalization

References

1. *Akivis, M. A.:* On the structure of two-component conjugate systems. Tr. Geom. Sem., 1, 7—31 (1966).

2. *Akivis, M. A., Rosenfeld B. A.:* Eli Cartan (1869—1951). Moscow (2014).

3. *Blaschke, V.:* Introduction to differential geometry. Moscow (1957).

4. *Vagner, V. V.:* The theory of the field of local hyperbands. Tr. Semin. Vectorn. Tensorn. Anal., 8, 197—272 (1950).

5. *Laptev, G. F.:* Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs., 2, 275—382 (1953).

6. *Lisitsina, I. E.:* Transon normalization of a hyperband H_m of an affine space. DGMF, 29, 38—40 (1998).

7. *Ostianu, N. M., Ryzhkov, V. V., Shveikin P. I.:* Outline of scientific research by German Fedorovich Laptev. Tr. Geom. Sem., 4, 7—70 (1973).

8. *Popov, Yu. I.:* Hyperband distribution of an affine space. Itogi Nauki i Tekhn. 203, 84—99 (2021).

9. *Popov, Yu. I.:* Hyperband distributions of affine space. Kaliningrad (2021).

10. *Popov, Yu. I.:* Introduction to the theory of a regular hyper-band distribution of an affine space. IKBFU's Vestnik. 10, 49—56 (2013).

11. *Popov, Yu. I.:* Special classes of hyperband distribution of an affine space. Kaliningrad (2021).

12. *Stolyarov, A. V.:* Differential geometry of stripes. Problems of Geom., 10, 25—54 (1978).

13. *Stolyarov, A. V.:* Projective-differential geometry of a regular hyperband distribution of m-dimensional linear elements. Problems of Geom. 7, 117—151 (1975).

14. *Finikov, S. P.:* Cartan's exterior form method in differential geometry. Moscow (1948).

15. *An-Min, L., Simon, U., Guosong, Zh., Zejun, H.:* Global Affine Differential Geometry of Hypersurfaces, De Gruyter (Expositions in Mathematics, 11) (2015).

16. *Ivey, Th. A., Landsberg, J. M.:* Cartan for Beginners: Differential Geometry Via Moving Frames and Exterior Differential Systems, Amer. Math. Soc. (Graduate Studies in Mathematics, 61) (2003).

For citation: Eliseeva, N. A., Popov, Yu. I. Hyperband distribution equipped with a field of conjugate planes. DGMF, 54 (1), 78—91 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-8.