УДК 51:53

А. В. Юров, А. А. Юрова

К ВОПРОСУ О СВЯЗЯХ МЕЖДУ ИНТЕГРИРУЕМЫМИ ИЕРАРХИЯМИ

Показано, что уравнения КдФ, мКдФ, Калоджеро – Дегаспериса (экспоненциальное и эллиптическое), синус-Гордон, Буссинеска, НУШ, Тоды и Вольтерра могут быть получены друг из друга с помощью цепочек дискретных симметрий. Фундаментальную роль при этом играет уравнение КП.

We demonstrate that such distinct equations as the KdV, mKdV, NLS as well as the Calogero–Degasperis, Toda and Volterra equations can generated from each other via the discrete symmetries chains. Interestingly, the key ingredient in this process is none other but the famous KP equations.

Ключевые слова: пара Лакса, нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных, точные решения, полная интегрируемость.

Key words: Lax pair, nonlinear partial differential equation, exact solution, integrable equation.

Введение

Нелинейные интегрируемые иерархии обладают чрезвычайно богатым набором удивительных математических свойств: бесконечный набор законов сохранения, пары Лакса (представление нулевой кривизны), преобразования Дарбу — Бэклунда (суперсимметрия), преобразования Лапласа — Шлезингера (и ассоциированные с ними JS- и JT-системы, определяемые йордановскими алгебрами), формализм обратной задачи, билинейный формализм Хироты, свойство Пенлеве (в многомерном случае — анализ сингулярных многообразий), вершинные операторы, алгебры Каца — Муди и Вирасоро, метод Уолквиста — Эстабрука, и это еще не полный список. Такой набор разнородных математических структур делает естественным предположение о том, что все эти свойства отражают наличие некоторой фундаментальной и пока не открытой глобальной структуры, определяющей свойство интегрируемости — структуры, из которой с необходимостью получаются все перечисленные свойства. Здесь уместна аналогия с электродинамикой: скажем, два на первый взгляд несвязанные явления — безмассовость фотона и закон сохранения электрического заряда — с необходимостью одновременно следуют из наличия группы калибровочных симметрий U(1). В случае интегрируемых систем такая «калибровочная группа», способная объяснить с единой позиции все «солитонные» чудеса, пока не найдена.

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта.
Сер.: Физико-математические и технические науки. 2017. № 1. С. 48 – 53.

В данной работе мы попробуем показать, что главным составным элементом этой фундаментальной структуры являются преобразования Дарбу (ПД). Более аккуратно: по-видимому, именно эти преобразования позволяют понять феномен пар Лакса и свойство Пенлеве в едином контексте. Более того, ПД (сформулированные на языке одевающих цепочек дискретных симметрий) позволяют не только строить точные решения интегрируемых моделей (в форме крамовских определителей), но и размножать интегрируемые иерархии, сохраняя при этом все главные свойства, например свойство Пенлеве. Еще раз, используя аналогию с электродинамикой, можно сказать, что такие иерархии естественно считать одной, фундаментальной иерархией, записанной в «различных калибровках».

Подчеркнем, что работа представляет вариант эссе на тему, означенную в заголовке. Мы фактически не приводим явного вида обсуждаемых уравнений, поскольку включение их в текст превратит небольшое эссе в небольшую монографию.

1. Одевающие цепочки и модифицированные уравнения КдФ

Не будет преувеличением сказать, что все известные примеры потенциалов уравнения Шрёдингера, для которых известны аналитические решения, могут быть получены с помощью ПД двумя способами: путем применения ПД к известному интегрируемому потенциалу или комбинацией последовательности ПД и дополнительного условия, гарантирующего форм-инвариантность. Для реализации второго способа удобно использовать не ПД в стандартном виде, а одевающие цепочки дискретных симметрий, открытые в [1]. Наложение условия замыкания на цепочки, содержащие N звеньев, позволяет единым образом получать интегрируемые потенциалы, начиная от гармонического осциллятора и кончая потенциалами, выражающиеся через трансценденты Пенлеве и их обобщения.

Для нас важно то, что формализм одевающих цепочек позволяет строить иерархии интегрируемых нелинейных уравнений. А. Б. Борисов и С. А. Зыков [2] предложили метод размножения интегрируемых уравнений, который был опробован ими на уравнениях КдФ и синус-Гордон. Основная идея метода заключается в следующем: уравнение (например, КдФ) записывается в виде условия совместности двух уравнений L и A, одно из которых квадратично по зависимым переменным. Используя далее ковариантность пары относительно ПД (как примера дискретной симметрии), строим вторую пару уравнений L и A. Исключая потенциалы по отдельности из двух L- и A-уравнений, получаем два уравнения, названные в [2] x- и t-цепочками соответственно. Если исключить потенциал из L и A, то мы получим мКдФ (заметим, что тем самым полностью прояснена природа подстановки Миуры). В свою очередь, x- и t-цепочки могут быть двумя способами преобразованы в пару Лакса для мКдФ, ПД для которых уже известно. Повторяя процедуру, мы будем порождать новые уравнения вместе с их LA-парами.

Так были построены второе и третье уравнения мКдФ. Первое точечной заменой сводится к экспоненциальному уравнению Калоджеро — Дегаспериса [3], а второе содержит эллиптическое уравнение тех же авторов. Аналогичный подход можно развить и для значительно более сложных $(1+2)$-мерных нелинейных уравнений. Например, в работе [4] одевающая процедура была успешна реализована для уравнений КП и БЛП. Таким образом, уравнения КдФ, мКдФ и два уравнения КД получаются друг из друга (вместе со своими иерархиями) с помощью преобразования Дарбу и могут рассматриваться как одно уравнение (одна иерархия), записанное в разных калибровках.

2. Уравнение синус-Гордон

Поскольку иерархия мКдФ включает в себя и знаменитое уравнения синус-Гордон (СГ), естественно поискать прямую связь КдФ и СГ. Такая связь действительно обнаружена. Например, согласно [5], используя преобразование Дарбу, можно перейти от одномерного уравнения Шрёдингера, связанного с иерархией КдФ, к матричному суперсимметричному гамильтониану. Суперзаряд («квадратный корень» из супергамильтониана) оказывается при этом оператором, генерирующим иерархию мКдФ. Как известно, в эту иерархию входит и уравнение синус-Гордон. В [5] указано, что если дополнить традиционные члены иерархии КдФ низшими уравнениями, то первое низшее КдФ связано с уравнением синус-Гордон преобразованием Миуры (в [5] речь идёт об уравнении sinh-Гордон, но это не меняет сути дела). Таким образом, уравнение синус-Гордон может быть названо первым низшим мКдФ, а значит, его *LA*-пара и преобразование Дарбу могут быть найдены из *LA*-пары и преобразования Дарбу для уравнения КдФ. Эта программа была реализована в работе [6], где было показано, что все цепочки, изученные в [2], могут быть получены из уравнения КдФ.

3. Свойство Пенлеве

Использование метода одевающих цепочек в теории нелинейных уравнений, возможно, способно пролить свет на еще одно интересное, но не до конца понятое характерное свойство, которым обладают члены интегрируемых иерархий — свойство Пенлеве. Суть дела заключается в следующем наблюдении: процедура построения интегрируемых уравнений из одевающей цепочки КдФ приводит к *LA*-парам, квадратично нелинейным по вспомогательным полям. Например, уравнение мКдФ записывается как условие совместности двух скалярных уравнений, одно из которых — уравнение Риккати. Это означает, что подвижными особенностями вспомогательных полей по переменной x могут быть только полюсы. *A*–уравнение линейно, поэтому это свойство сохраняется и по переменной t. Вспомогательные поля, в свою очередь, удовлетворяют второму уравнению мКдФ (которое, напомним, после точечной экспоненциальной замены сводится к экспоненциальному уравнению Калоджеро — Дегаспериса). Таким образом, связь уравнения КД (и значит, всей его иерархии) со свойством Пенлеве становится очевидной, что непосредственно следует из способа построения этого уравнения. То же относится и к иерархии эллиптического КД. Следовательно, возникает естественная мысль, что свойство Пенлеве может быть получено как следствие суперсимметричной связи между иерархиями (или, иначе, того факта, что все они порождены одевающими цепочками) и наличием *LA*-пары для «иерархии-источника», например для иерархии КдФ. Связь свойства Пенлеве с наличием *LA*-пары и преобразованиями Беклунда известна и используется в методе сингулярных многообразий. Метод одевающих цепочек устанавливает аналогичную связь, но «в обратную сторону»: от *LA*-пар и преобразований Дарбу к свойству Пенлеве, а не наоборот.

4. Алгебры Каца — Муди

В работе [7] показано, что преобразование потенциалов, для которых решения уравнения Шрёдингера связаны ПД, обладают групповой структурой. Рассматривались бесконечно малые вариации суперпотенциала и выделялись три основных типа генераторов, соответствующих таким преобразованиям. На следующем этапе исследовались многократные коммутаторы и показано, что все линейно независимые генераторы объединяются в три бесконечных набора генераторов, параметризованных двумя индексами. Эти генераторы образуют подалгебру Каца — Муди группы SU(2). Таким образом, появление данной алгебры непосредственно связано именно с ПД.

5. Нелинейное уравнение Шрёдингера и уравнение КП

НУШ, помимо ПД, допускает другой важный тип дискретных симметрий — преобразования Шлезингера (ПШ). Удивительным фактом является то, что цепочки, образованные из последовательных ПШ, оказываются знаменитыми цепочками Тоды! Другими словами, вся теория цепочек Тоды может быть построена из теории НУШ. Второе замечательное следствие связано с одевающими цепочками для уравнений Тоды. Оказывается, эти цепочки замкнуты, а роль модифицированных уравнений Тоды играют знаменитые уравнения Вольтерра [8]! Все эти наблюдения вполне вписываются в рамки нашей гипотезы о том, что все интегрируемые уравнения суть одно уравнение, «отраженное в бесконечном количестве зеркал», связанных изоспектральными симметриями. Однако существует ли связь между НУШ и иерархией КдФ? Ответ: да! Такая связь была недавно обнаружена в работах П. Дюбара, П. Гайлара, К. Клейна и В. Матвеева (см., например: [9]).

Основная цель авторов была несколько иной — они пытались построить высшие бризеры Перегрина (волны-убийцы) для НУШ (см.: [10]). Непосредственное применение ПД к солитону Перегрина давало тождественный нуль, поэтому авторы развили чрезвычайно оригинальную методику и попутно установили связь НУШ (точнее, уравнения Гросса — Питаевского) с уравнениями Кадомцева — Петвиашвили. Отсылая читателей за подробностями к этим работам, отметим только, что на этом пути открывается заманчивая возможность свести ПШ к ПД путем наложения редукций очень специально вида. Нам же осталось отметить, что КдФ является одномерным пределом уравнений КП. Сюда же можно вложить и уравнение Буссинеска.

Заключение

Таким образом, все уравнения, которые обсуждались в данной работе, могут получены из уравнений КП. Означает ли это, что КП и является искомым фундаментальным уравнением? На наш взгляд, это (увы!) не так. Вне рамок обсуждения остались уравнения Дэви — Стюартсона [11], уравнения БЛП [12], двумерные модифицированные уравнения мКдФ [13], уравнения Веселова — Новикова [14]. На самом деле существуют определенные, но более спекулятивные связи этих иерархий с иерархией КП, которые мы здесь не обсуждаем. В заключение мы хотим высказать следующее предположение: фундаментальное единое уравнение, вероятнее всего, должно быть дискретным (как разностное уравнение Хироты). За этот факт говорит многое, однако мы оставим нашу мотивацию до следующей публикации.

Список литературы

1. *Веселов А. П., Шабат А. Б.* Одевающая цепочка и спектральная теория оператора Шрёдингера // Функц. анализ и его прил. 1993. Т. 27, № 2. С. 1—21.

2. *Борисов А. Б., Зыков С. А.* Одевающая цепочка дискретных симметрий и размножение нелинейных уравнений // ТМФ. 1998. Т. 115, № 2. С. 199—214.

3. *Calogero F., Degasperis A.* Spectral Transform and Solitons. North-Holland Publishing Company, 1982.

4. *Юров А. В.* Сопряженные цепочки дискретных симметрий (1 + 2)-нелинейных уравнений // ТМФ. 1999. Т. 119, № 3. С. 419—428.

5. *Андреев В. А., Бурова М. В.* Низшие уравнения Кортевега — де Фриза и суперсимметричная структура уравнений синус-Гордон и Лиувилля // ТМФ. 1990. Т. 85, №3. С. 376—387.

6. *Yurov A.* Discrete symmetry's chains and links between integrable equationsm // Journal of Mathematical Physics. 2003. Vol. 44, № 3. P. 1183–1201.

7. *Березовой В. П., Пашнев А. И.* Суперсимметричная квантовая механика и перестройка спектров гамильтонианов // ТМФ. 1987. Т. 70, № 1. С. 146—153.

8. *Yurov A.* V. Closed dressing chains of D = 1 and D = 2 Toda lattice // Dynamics of PDE. 2004. Vol. 1, № 2. P. 85–89.

9. *Dubard P., Gaillard P., Klein C., Matveev V.* On multi-rogue wave solutionsof the NLS equation and positon solutions of the KdV equation // Eur. Phys. J. Spec. Top. 2010. Vol. 185. P. 247–258.

10. *Yurova A. A.* A hidden life of Peregrine's soliton: rouge waves in the oceanic depths // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 2014. Vol. 11. P. 1450057.

11. *Юров А. В.* Преобразование Бэклунда — Шлезингера для уравнений Дэви — Стюартсона // ТМФ. 1996. Т. 109, № 3. С. 338—346.

12. *Yurov A. V.* BLP dissipative structures in plane // Phys. Lett. A. 1999. Vol. 262. P. 445–452.

13. *Leble S. B., Yurov A. V.* Reduction Restrictions of Darboux and Laplace Transformations for the Goursat Equation // Journal of Mathematical Physics. 2002. Vol. 43, № 2. P. 1095–1105.

14. *Yurov V. A., Yurov A. V.* The Cauchy problem for the generalized hyperbolic Novikov-Veselov equation. arXiv:1509.06078 [nlin.SI].

Об авторах

Артем Валерианович Юров — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: AIUrov@kantiana.ru

Алла Александровна Юрова — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининградский государственный технический университет, Калининград.

E-mail: yurov@freemail.ru

About the authors

Prof. Artyom Yurov, I. Kant Baltic federal university, Kaliningrad.

E-mail: AIUrov@kantiana.ru

Dr Alla Yurova, ass. prof., I. Kant Baltic federal university, State Tehnical University, Kaliningrad.

E-mail: yurov@freemail.ru

УДК 51:53

Р. В. Чириков, В. А. Юров

ИМПАКТОННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ВИХРЕВОЙ НИТИ

Показан новый метод построения точных решений, описывающих форму вихревых нитей и основанный на применении бинарного преобразования Дарбу к решениям нелинейного уравнения Шрёдингера. Построен новый тип решений — импактон — и вычислены кривизна и кручение соответствующей вихревой нити.

A new way of construction of exact solutions describing the shape and the dynamics of vortex filaments is described. The new method is based on application of a binary Darboux transformation to the solutions of the nonlinear Schrödinger equation. A new type of solutions is constructed: the impacton. The explicit form of the curvature and torsion of corresponding vortex filament are calculated.

Ключевые слова: вихревые нити, нелинейное уравнение Шрёдингера, преобразование Дарбу, импактон.

Key words: vortex filament, nonlinear Schrödinger equation, impacton.