4. *Малаховский В.С.* Оснащенные гиперкомплексы квадратичных элементов // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.167-178.
5. *Малаховский В.С.* Индуцированно оснащенные многообразия фигур в однородном пространстве // Там же, 1974. Т.5. С.319-334.
6. *Малаховский В.С.* Дифференциальная геометрия многообразий фигур // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1981. Т.12. С.31-60.
7. *Малаховский В.С.* Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Калининград, 1986. 72 с.

E.V.Skrydlova, Ju.I.Shevchenko

VLADISLAV STEPANOVICH MALAKHOVSKY AND HIS GEOMETRY

In the article, prepared to seventieth birthday of professor V.S.Malakhovsky, biographical facts are adduced and principal directions of differential geometry of figures manifold - Malakhovsky′s geometry - are indicated.

УДК. 514.75

О ПОТОКАХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ РАЗВЕРТЫВАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Н.В. А м и ш е в а

(*Кемеровский государственный университет*)

В окрестности изучаемой точки поток можно рассматривать как семейство траекторий $r=r(t,\alpha)$, зависящих от параметра α. При $\alpha=0$ выделяется действительная траектория $r(t,0)=r(t)$. Поэтому уравнение $r(t,\alpha)=\rho(t)+\alpha\rho'(t)$, определяющее развертывающуюся поверхность в трехмерном пространстве, задает и некоторый поток. Исследован геодезический поток, возникающий на кокасательном расслоении этой поверхности. Краткое изложение результатов данной статьи приведено в [1], [2].

§1. Симплектическая структура кокасательного расслоения развертывающейся поверхности

Развертывающуюся поверхность будем рассматривать как совокупность касательных к некоторой пространственной кривой, определенной вектор-функцией $\rho(s)$ натурального параметра s. Тогда любая точка поверхности определяется следующей вектор-функцией:

$$r(s,\lambda)=\rho(s)+\lambda\tau(s), \qquad (1)$$

где $\tau(s)$-единичный вектор касательной к кривой $\rho=\rho(s)$. Используя две первых из деривационных формул репера Френе:

$$d\rho(s)=\tau(s)ds,\ d\tau(s)=k(s)\nu(s)ds,$$
$$d\nu(s)=[\chi(s)\beta(s)-k(s)\,\nu(s)]ds,\ d\beta(s)=-\chi(s)\,\nu(s)ds,$$

получим

$$dr=(ds+d\lambda)\tau(s)+\lambda k(s)\,\nu(s)ds. \quad (2)$$

Вводя обозначения $\tau(s)=e_1(s)$, $\nu(s)=e_2(s)$, $\omega^1=ds+d\lambda$, $\omega^2=ds$, перепишем равенство (2) в виде:

$$dr=\omega^1 e_1(s)+\lambda k(s)\omega^2 e_2(s). \quad (3)$$

Известно, что кокасательное расслоение любого гладкого многообразия является симплектическим многообразием [3], нахождение симплектической структуры которого описано в книге [3, с.152]. Найдем симплектическую структуру кокасательного расслоения развертывающейся поверхности V, определенной вектор-функцией (1). Формы Пфаффа ω^1 и ω^2 примем за базисные формы кокасательной плоскости T^*V к поверхности V в точке (x^1,x^2), где $x^1=s+\lambda$, $x^2=s$. Тогда любой ковектор можно представить в виде: $\xi=\xi_1\omega^1+\xi_2\omega^2$. Касательный вектор к кокасательному пространству поверхности V будет иметь вид: $a=\{dx_1,dx_2,d\xi_1,d\xi_2\}$. Естественная проекция $p:T^*V\to V$ определяется уравнениями $x^1=x^1$, $x^2=x^2$, $\xi_1=0$, $\xi_2=0$. Дифференциал этого отображения dp переводит касательный вектор a к кокасательному пространству в касательный вектор к поверхности V: dp $a=\{dx^1,dx^2\}$.

Сначала определим 1-форму $\omega^{(1)}$ на пространстве T^*V следующим образом: $\omega^{(1)}a=\langle\xi, dp\, a\rangle$, т.е. значение формы на векторе a равно значению ковектора ξ на векторе dp a. Итак, $\omega^{(1)}a=\langle\xi, dp\, a\rangle=\xi_1dx^1+\xi_2dx^2$. В качестве 2-формы ω возьмем внешний дифференциал от формы $\omega^{(1)}$: $\omega=d\xi_1\wedge dx^1+d\xi_2\wedge dx^2$. Очевидно, что форма ω - невырожденная. Так как внешний дифференциал от внешнего дифференциала равен нулю, то форма замкнута. Следовательно, кокасательное пространство поверхности V является симплектическим многообразием с симплектической структурой ω.

§2. Интегрируемость геодезического потока развертывающейся поверхности

Предполагается, что рассматриваемая развертывающаяся поверхность вложена в трехмерное евклидово пространство. Однако, на любом гладком многообразии M, вложенном в евклидово пространство, имеется риманова метрика g_{ij}, порожденная метрикой объемлющего евклидова пространства. По метрике g_{ij} определяется тензорное поле g^{ij} из условия $g^{ij}g_{ik}=\delta^i_k$. Тензорное поле g^{ij} определяет скалярное произведение в каждом кокасательном пространстве $T^*_\delta M$. В частности, если $\xi\in T^*M$, то $\|\xi\|^2=g^{ij}\xi_i\xi_j$. В то же время для римановой метрики g_{ij} на многообразии M существует единственная согласованная с ней аффинная связность, в которой определяется производная тензорного поля. Тензорное поле называют параллельным вдоль кривой x(t), если ковариантная производная этого поля равна нулю. Кривую x(t) на многообразии M называют геодезической, если ее касательный вектор dx(t)/dt параллелен вдоль кривой x(t).

На кокасательном расслоении T^*M гладкого многообразия M, являющимся симплектическим многообразием, имеется геодезический поток. Термин «геодезический поток» проясняется следующим образом. Метрика g_{ij} задает диффеоморфизм $f:TM\to T^*M$. Обратное отображение задается поднятием индексов: $f^{-1}(\xi)=g^{ij}\xi_j$, $\xi\in T^*M$. Имеет место следующая теорема [4]: при естественном изоморфизме $T^*M\to TM$ траектории геодезического потока переходят в кривые, составленные из касательных векторов к геодезическим линиям на многообразии M.

Для геодезического потока, определенного на T^*M, известен [4, с.120] гамильтониан $H=2^{-1}g^{ij}\xi_i\xi_j$. Согласно этой формуле гамильтониан геодезического потока, определенного на кокасательном расслоении развертывающейся поверхности (1), имеет вид:

$$H=\frac{(x^1-x^2)^2k^2(x^2)\xi_1^2+\xi_2^2}{2(x^1-x^2)^2k^2(x^2)},$$

где $x^1=s+\lambda$, $x^2=s$.

Так как $\dim T^*M=4$, то для полной интегрируемости достаточно указать еще один первый интеграл геодезического потока. Если ввести новые переменные x^1, x^2, такие что $dx^1=d\lambda+ds$, $dx^2=\lambda k(s)ds$, то гамильтониан геодезического потока развертывающейся поверхности будет иметь вид: $H=2^{-1}(\xi_1^2+\xi_2^2)$. Тогда еще один интеграл этого потока можно записать в виде: $K=2^{-1}(\xi_1^2-\xi_2^2)$.

§3. Выражение механических величин потока, определяемого развертывающейся поверхностью через кривизну и кручение ребра возврата этой поверхности

Движение твердого тела в R^3 описывается следующими уравнениями [5 с.106]:

$$K'=[\omega,K]+[e,u],\quad e'=[e,\omega]. \tag{5}$$

Здесь K - кинетический момент тела, ω - мгновенная угловая скорость тела, а векторы e и u зависят от условий движения твердого тела. Ясно, что если уравнение (1), определяющее развертывающуюся поверхность, задает и некоторый поток, то механические величины K, ω, e, u должны выражаться через параметры уравнения (1), т.е. через s, λ.

Можно описать механическое движение, определяемое уравнением (1), следующим образом. Если взять произвольную кривую $\rho=\rho(s)$ и жесткий стержень, одним концом касающийся взятой кривой в каждой ее точке, то каждая точка стержня производит движение. Движущаяся точка стержня определяется локальными координатами (λ,s). Так как предполагается движение жесткого стержня, касающегося кривой, то $d\lambda=0$.

При каждом значении параметра s кривой ρ(s) сопровождающий трехгранник Френе вращается как твердое тело с вектором мгновенной угловой скорости ω. Точки трехгранника в момент времени, соответствующий значению s, обладают такими скоростями, как если бы он вращался около оси, направленной по вектору ω [6]. Вращение трехгранника вокруг оси, направленной по вектору ω, сообщает концам векторов τ, ν, β те же линейные скорости по отношению к s, которыми они обладают в данный момент фактически [6].

В книге [6] имеется выражение вектора мгновенной угловой скорости ω через кривизну и кручение кривой ρ(s). С помощью формул Френе вектор мгновенной угловой скорости выражается следующим образом [6, с.173]:

$$\omega=\chi(s)\tau(s)+k(s)\beta(s). \tag{6}$$

Для величин K, e, u также найдено выражение через локальные координаты развертывающейся поверхности λ, s.

Теорема. Имеют место формулы:

$$K=m\lambda^2k(s)\beta(s),\ e=\tau(s),\ u=m\lambda^2k'(s)\nu(s),$$

Доказательство. Момент количества движения $K(K_X,K_Y,K_Z)$ относительно точки O твердого тела, закрепленного в этой точке, и вращающегося с угловой скоростью $\omega(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, равен [4]:

$$K_X=I_{XX}\omega_1-I_{XY}\omega_2-I_{XZ}\omega_3,\ K_Y=-I_{YX}\omega_1+I_{YY}\omega_2-I_{YZ}\omega_3,$$
$$K_Z=-I_{ZX}\omega_1-I_{ZY}\omega_2+I_{ZZ}\omega_3. \tag{7}$$

Здесь I_{XY}, I_{XZ}, I_{YZ} - центробежные моменты инерции, а I_{XX}, I_{YY}, I_{ZZ} - осевые моменты. Они вычисляются по формулам:

$$I_{XX}=A=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)dm,\ I_{YY}=B=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+z^2)dm,\ I_{ZZ}=C=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dm,$$
$$I_{XY}=\iiint\limits_{\Omega}xydm,\ I_{XZ}=\iiint\limits_{\Omega}xzdm,\ I_{YZ}=\iiint\limits_{\Omega}yzdm.$$

Движущейся точкой является точка торса и ее радиус-вектор OM=λτ. Следовательно, в инерциальной системе координат имеем: M(λ,0,0), $I_{XX}=0$, $I_{YY}=m\lambda^2$, $I_{ZZ}=m\lambda^2$, $I_{XY}=I_{XZ}=I_{YZ}=0$. Отсюда следует, что оси τ, ν, β являются главными осями инерции движущегося тела с массой m. Так как $I_{YY}=I_{ZZ}$, т.е. B=C, то рассматриваемое движение является случаем Лагранжа.

Согласно формулам (7) определяется кинетический момент:

$$K_X=I_{XX}\omega_1=0,\ K_Y=I_{YY}\omega_2=0,\ K_Z=I_{ZZ}\omega_3=m\lambda^2k(s).$$

Итак,

$$K=m\lambda^2k(s)\beta(s). \tag{8}$$

Осталось определить векторы e и u. Ясно, что τ′ параллелен [τ,ω]. Учитывая 2-е уравнение системы (5), рассмотрим такое вращение трехгранника вокруг оси с направлением ω, чтобы имело место равенство τ′=[τ,ω]. Тогда e=τ. Согласно правилу дифференцирования [4,с.33] имеем:

$$\frac{dK}{dt}=\frac{dK}{dt}+[\omega,K].$$

В силу формулы (8)

$$\frac{dK}{ds} = m\lambda^2 k'(s)\beta(s) + [\omega, K].$$

Из последнего соотношения с учетом 1-го равенства системы (5), получаем

$$[e,u]=m\lambda^2 k'(s)\beta(s).$$

Так как e=τ, [τ,ν]=β, то u= $m\lambda^2 k'(s)\nu(s)$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Амишева Н.В.* Интегрируемость геодезического потока развертывающейся поверхности // Тез. докл. междунар. геом. семинара им. Н.И. Лобаческого «Совр. геом. и теор. физ. полей». Казань, 1997.
2. *Амишева Н.В.* Поток, определяемый развертывающейся поверхностью // Тез. докл. V Междунар. конф. женщин-математиков «Математика. Экономика» Ростов н/Д., 1997.
3. *Фоменко А.Т.* Дифференциальная геометрия и топология. Допол. главы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
4. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. Ижевск: Факториал; Просперус, 1995.
5. *Фоменко А.Т.* Симплектическая геометрия. Методы и приложения М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
6. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М., 1956.

N.V.Amisheva

ON STREAMS DEFINED BY EVOLVED SURFACE

In neighbourhood of investigated point stream can be considered as family of trajectories r=r(t,α), dependent on parameter α. With α=0 real trajectory r=(t,0)=r(t) is distinguished. Therefore the equation r(t, α)=ρ(t)+ α ρ′(t), defining evolved surface in three dimentional space, gives some stream. Geodesic stream, arising on cotangent bundle of the surface, is investigated.

УДК 514.75

О НОРМАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Б.А. А н д р е е в

(Калининградский государственный университет)

Структуры теории точечных отображений обобщаются и применяются для изучения нормализованного проективного пространства P_n. Найдены и геометрически охарактеризованы порожденные нормализацией геометрические образы