Список литературы

1. *Елисеева Н. А.* Нормальные связности, индуцируемые в расслоении нормалей второго рода на Λ-подрасслоении Н(П)-распределения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2008. №39. С. 63—66.
2. *Елисеева Н.* А. Нормальные связности, индуцируемые в расслоении нормалей первого рода на Λ-подрасслонии Н(П)-распределения // Там же. 2006. №37. С. 44—51.
3. *Елисеева Н. А.* Н(П)-распределения проективного пространства. Калининград, 2002. Деп. в ВИНИТИ РАН, №206-В2002.
4. *Столяров А. В.* Дифференциальная геометрия полосы // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т.10. С. 25—54.

N. Eliseeva

INVESTIGATION OF THE NORMAL CONNECTIONS,
INDUCED IN A BUNDLE OF NORMALS OF THE 2-ND KIND
ON Λ-SUBBUNDLE OF H(П)-DISTRIBUTION

This article develops some ideas published in one of the previous article of the author [1]. The coincidence conditions of the normal connections, induced on equipped in sense of Norden — Bortolotti Λ-subbundle are indicated.

УДК 514.75

М. В. Кретов

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

КОМПЛЕКСЫ КВАДРИК С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ В ЛИНИЮ МНОГООБРАЗИЕМ ЦЕНТРОВ

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются комплексы (трехпараметрические семейства) центральных невырожденных квадрик с вырождающимся в линию многообразием центров. Показано, что такие комплексы существуют. Найдены геометрические свойства исследуемых многообразий.

Отнесем комплекс K_{31} центральных невырожденных квадрик q с вырождающимся в линию L многообразием центров к реперу $R=\{A, \bar{e}_i\}$, $i, j, k, \ldots = 1, 2, 3$, который геометрически характеризуется следующим образом: вершина репера совмещена с центром квадрики q, а векторы $\bar{e}_i$ направлены по тройке сопряженных диаметров указанной квадрики, причем концы их лежат на квадрике q.

Уравнение квадрики q в репере R принимает вид

$$(X^1)^2+(X^2)^2+(X^3)^2-1=0. \qquad (1)$$

Принимая формы $\theta^1=\omega_1^2+\omega_2^1$, $\theta^2=\omega_2^3+\omega_3^2$ и $\theta^3=\omega_1^3+\omega_3^1$ за независимые первичные, запишем систему уравнений Пфаффа комплекса K_{31} в виде

$$\omega_i^i=A_{ij}\theta^j, \ \ \omega^1=B_j^1\theta^j, \ \ \omega^2=\lambda^2\omega^1, \ \ \omega^3=\lambda^3\omega^1 \qquad (2)$$

(по i не суммировать!).

Определение 1. *Комплекс K_{31} квадрик, в котором касательная к линии L параллельна вектору $\bar{e}_1$ и на квадрике q имеется, по крайней мере, три фокальные точки [1] A_i, не лежащие на одной прямой и на одной плоскости, проходящей через центр, и определяющие три сопряженных направления, называется комплексом $\hat{K}_{31}$.*

Теорема 1. *Существует шесть и только шесть классов комплексов $\hat{K}_{31}$: комплексы K_{31}^1, K_{31}^{2i}, K_{31}^3 и K_{31}^4, определяемые с произволом, соответственно: одной функции трех аргументов, одной функции двух аргументов, двух функций одного аргумента и одной функции одного аргумента.*

*Доказательство***.** Специализируем репер R таким образом, чтобы концы векторов $\bar{e}_i$ совпадали соответственно с фокальными точками A_i. Такой репер будет каноническим.

Так как касательная прямая к линии L параллельна вектору $\bar{e}_1$, то:

$$\omega^2 = 0,\ \ \omega^3 = 0. \qquad (3)$$

Замыкая уравнения (3), находим: $\omega_1^2 = \alpha\omega^1,\ \ \omega_1^3 = \beta\omega^1$.

Учитывая то, что A_i принадлежат фокальному многообразию квадрики q, запишем систему уравнений Пфаффа многообразия $\hat{K}_{31}$ в виде:

$$\omega_1^1 = -\omega^1,\ \ \omega^2 = \omega^3 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0,\ \ \omega^1 = -A_{1i}\theta^i,$$
$$\omega_1^2 = \alpha\omega^1,\ \ \omega_1^3 = \beta\omega^1,\ \ \omega_2^3 = A_{2i}^3\theta^i, \qquad (4)$$

где формы $\theta^1 = \omega_2^1,\ \ \theta^2 = \omega_3^1$ и $\theta^3 = \omega_3^2$ приняты за базисные.

Замыкая уравнения $\omega_2^2 = 0$ и $\omega_3^3 = 0$, получим соотношения:

$$\alpha A_{12} = 0,\ \alpha A_{13} = 0,\ \beta A_{11} = 0,\ \beta A_{13} = 0,\ \ A_{21}^3 = 0,\ \ A_{22}^3 = 0.$$

Тогда система уравнений (4) для комплексов K_{31}^1, K_{31}^{2i}, K_{31}^3 и K_{31}^4 состоит из уравнений:

$$\omega_1^1 = -\omega^1,\ \ \omega^2 = \omega^3 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0 \qquad (5)$$

и соответственно из уравнений:

$$\omega^1 = -A_{1i}\theta^i,\ \ \omega_2^3 = A_{23}^3\theta^3, \qquad (6)$$
$$\omega^1 = -A_{11}\theta^1 - A_{12}\theta^2,\ \ \omega_2^3 = A_{23}^3\theta^3, \qquad (7)$$
$$\omega^1 = -A_{12}\theta^2 - A_{13}\theta^3,\ \ \omega_2^3 = A_{23}^3\theta^3, \qquad (8)$$
$$\omega^1 = -A_{13}\theta^3 - A_{11}\theta^1,\ \ \omega_2^3 = A_{23}^3\theta^3, \qquad (9)$$
$$\omega^1 = -A_{13}\theta^3,\ \ \omega_2^3 = A_{23}^3\theta^3, \qquad (10)$$
$$\omega^1 = -A_{11}\theta^1,\ \ \omega_2^3 = 0. \qquad (11)$$

При получении систем уравнений (5) — (11) исключались случаи, когда многообразия центров вырождались в точку.

Находя чистые замыкания [2] систем (5) — (11), убеждаемся в справедливости доказываемой теоремы.

Теорема 2. *Комплексы* K_{31}^1, K_{31}^{2i} *и* K_{31}^3 *обладают следующими геометрическими свойствами*:

1) *фокальная точка* A_1 *и координатная прямая* $(A, \bar{e}_1)$ *неподвижны*;

2) *фокальные точки* $A_{\hat{i}}$ $(\hat{i}, \hat{j}, ... = 2, 3)$ *описывают цилиндрические поверхности с образующими, параллельными прямой* $(A, \bar{e}_1)$, *и касательными плоскостями в точках* $A_{\hat{i}}$, *параллельными соответственно координатным плоскостям* $(A, \bar{e}_i, \bar{e}_j)$, $i < j, i, j \neq \hat{i}$;

3) *смещение точки* $A_{\hat{i}}$ *при переходе с одной образующей цилиндрической поверхности* $(A_{\hat{i}})$ *на другую происходит в направлении вектора* $\bar{e}_{\hat{j}}$, $\hat{j} \neq \hat{i}$;

4) *вдоль асимптотической линии поверхности* $(A_{\hat{i}})$ *координатная плоскость* $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_{\hat{i}})$ *неподвижна*;

5) *индикатрисы векторов* $\bar{e}_{\hat{i}}$ *описывают поверхности, касательные плоскости к которым параллельны координатным плоскостям* $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_{\hat{i}})$, $\hat{j} \neq \hat{i}$.

Доказательство.

1. В силу уравнений (5) — (10)

$$dM_1^1 = (dX^1 + A_{1i}(X^1 - 1)\,\theta^i)\,\bar{e}_1, \tag{12}$$

$$dM_1^{21} = (dX^1 + A_{11}(X^1 - 1)\,\theta^1 + A_{12}(X^1 - 1)\,\theta^2)\,\bar{e}_1, \tag{13}$$

$$dM_1^{22} = (dX^1 + A_{12}(X^1 - 1)\,\theta^2 - A_{13}(X^1 - 1)\,\theta^3)\,\bar{e}_1, \tag{14}$$

$$dM_1^{23} = (dX^1 + A_{11}(X^1 - 1)\,\theta^1 + A_{13}(X^1 - 1)\,\theta^3)\,\bar{e}_1, \tag{15}$$

$$dM_1^3 = (dX^1 + (X^1 - 1)\,A_{13}\theta^3)\,\bar{e}_1, \tag{16}$$

где M_1^1, M_1^{2i} и M_1^3 — текущие точки прямых $(A, \bar{e}_1)$, ассоциированных соответственно с комплексами K_{31}^1, K_{31}^{2i} и K_{31}^3. Анализируя формулы (12) и (13), убеждаемся в справедливости первого утверждения теоремы.

2. Из систем (5) — (10) и деривационных формул репера R следует, что

$$dA_2 = (\theta^1 - A_{1i}\theta^i)\,\bar{e}_1 + A_{23}^3\theta^3\bar{e}_3,$$
$$dA_3 = (\theta^2 - A_{1i}\theta^i)\,\bar{e}_1 + \theta^3\bar{e}_2,$$
$$dA_2 = (\theta^1 - A_{11}\theta^1 - A_{12}\theta^2)\,\bar{e}_1 + A_{23}^3\theta^3\bar{e}_3,$$
$$dA_3 = (\theta^2 - A_{11}\theta^1 - A_{12}\theta^2)\,\bar{e}_1 + \theta^3\bar{e}_2,$$
$$dA_2 = (\theta^1 - A_{12}\theta^2 - A_{13}\theta^3)\,\bar{e}_1 + A_{23}^3\theta^3\bar{e}_3,$$
$$dA_3 = (\theta^2 - A_{12}\theta^2 - A_{13}\theta^3)\,\bar{e}_1 + \theta^3\bar{e}_2, \qquad (17)$$
$$dA_2 = (\theta^1 - A_{11}\theta^1 - A_{13}\theta^3)\,\bar{e}_1 + A_{23}^3\theta^3\bar{e}_3,$$
$$dA_3 = (\theta^2 - A_{11}\theta^1 - A_{13}\theta^3)\,\bar{e}_1 + \theta^3\bar{e}_2,$$
$$dA_2 = (\theta^1 - A_{13}\theta^3)\,\bar{e}_1 + A_{23}^3\theta^3\bar{e}_3,$$
$$dA_3 = (\theta^2 - A_{13}\theta^3)\,\bar{e}_1 + \theta^3\bar{e}_2,$$

для фокальных точек A_2 и A_3, ассоциированных соответственно с комплексами K_{31}^1, K_{31}^{2i} и K_{31}^3.

Уравнения асимптотических линий поверхностей (A_2) и (A_3), ассоциированных с комплексами K_{31}^1, K_{31}^{2i} и K_{31}^3, имеют вид

$$(\theta^3)^2 = 0, \qquad (18)$$

откуда следует второе утверждение теоремы.

3. Справедливость предложения следует из формул (17).

4. Пусть $M_{\hat{i}}^1$, $M_{\hat{i}}^{2i}$ и $M_{\hat{i}}^3$ — текущие точки координатных плоскостей $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_{\hat{i}})$, ассоциированных соответственно с комплексами K_{31}^1, K_{31}^{2i} и K_{31}^3. Тогда из вида дифференциалов указанных выше текущих точек и уравнения (18) следует соответствующее утверждение теоремы.

5. Последнее утверждение теоремы вытекает из того, что имеет место:

$$d\bar{e}_2 = \theta^1\bar{e}_1 + A_{23}^3\theta^3\bar{e}_3, \quad d\bar{e}_3 = \theta^2\bar{e}_1 + \theta^3\bar{e}_2.$$

Теорема 3. *Комплексы* K_{31}^4 *обладают следующими геометрическими свойствами*:

1) *фокальная точка* A_1, *координатная прямая* $(A, \bar{e}_1)$ *и координатная плоскость* $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ *неподвижны*;

2) *фокальная точка* A_2 *описывает прямую, параллельную вектору* $\bar{e}_1$;

3) *фокальная точка* A_3 *описывает поверхность с касательной плоскостью в точке* A_3, *параллельной координатной плоскости* $(A, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$;

4) *индикатриса вектора* $\bar{e}_2$ *вырождается в линию с касательной, параллельной вектору* $\bar{e}_1$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 4. *Характеристические многообразия* [1] *квадрики q, ассоциированной с комплексами* K_{31}^{2i} *и* K_{31}^{3}, *состоят из точек координатных прямых* $(A, \bar{e}_2)$, $(A, \bar{e}_3)$ *и фокальной точки* A_1.

Доказательство. Характеристические многообразия квадрики q, являющейся образующим элементом комплексов K_{31}^{2i} и K_{31}^{3}, соответственно задаются следующими системами уравнений:

$$X^1(A_{11}X^1 + X^2 - A_{11}) = 0,\ X^1(A_{12}X^1 + X^3 - A_{12}) = 0,\ X^2X^3 = 0, X^1X^2 = 0,$$

$$X^1(A_{12}X^1 + X^3 - A_{12}) = 0,\ A_{13}(X^1)^2 + (1 + A_{23}^3)X^2X^3 - A_{13}X^1 = 0,$$

$$X^1(A_{11}X^1 + X^2 - A_{11}) = 0, X^1X^3 = 0, A_{13}(X^1)^2 + (1 + A_{23}^3)X^2X^3 - A_{13}X^1 = 0,$$

$$X^1X^2 = 0, X^1X^3 = 0, A_{13}(X^1)^2 + (1 + A_{23}^3)X^2X^3 - A_{13}X^1 = 0,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Обозначим через P_1 точку с координатами:

$$\left(\frac{A_{12}(1 + A_{23}^3)}{1 + A_{12} + A_{12}A_{23}^3}, \frac{A_{11}}{1 + A_{12} + A_{12}A_{23}^3}, \frac{A_{12}}{1 + A_{12} + A_{12}A_{23}^3}\right),$$

а через s — плоскость, задаваемую уравнением $X^2 = A_{11}(1 - X^1)$.

Теорема 5. *Характеристическое многообразие квадрики q, ассоциированной с комплексами* K_{31}^{1}, *состоит из точек координатных прямых* $(A, \bar{e}_2)$, $(A, \bar{e}_3)$, *точек* A_1 *и* P_1, *а квадрики q, ассоциированной с комплексами* K_{31}^{4}, *— из точек плоскости s, прямых* $(A, \bar{e}_2)$, $(A, \bar{e}_3)$ *и точки* A_1.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.

Обозначим через P_2 точку с координатами $\left(\frac{(A_{11})^2-1}{(A_{11})^2+1}, \frac{2A_{11}}{(A_{11})^2+1}, 0\right)$.

Теорема 6. *Фокальное многообразие квадрики q, ассоциированной с комплексами K_{31}^1, K_{31}^{2i} и K_{31}^3, состоит из пяти точек, три из которых являются концами векторов $\bar{e}_i$, а остальные диаметрально противоположны точкам A_2 и A_3, а фокальное многообразие квадрики q, ассоциированной с комплексами K_{31}^4, содержит еще дополнительную точку P_2.*

Доказательство теоремы следует из того, что фокальные многообразия квадрики q, описывающей комплексы K_{31}^1, K_{31}^{2i}, K_{31}^3 и K_{31}^4, задаются системами уравнений, состоящих из уравнения (1) и соответственно из уравнений, задающих характеристические многообразия квадрики q, ассоциированной с указанными комплексами.

Список литературы

1. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1974. Вып. 6. С. 113—133.

2. *Малаховский В.С.* Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1978.

M. Kretov

COMPLEXES OF QUADRICS WITH VARIETY OF THE CENTERS DEGENERATING INTO A LINE

In three-dimensional affine space complexes (three-parametrical families) of central non-degenerate quadrics with variety of the centers degenerating into a line are considered. It is shown, that such complexes exist. Geometrical properties of researched varieties are found.