For a linear connection ∇ on a manifold M_n we give formulas for explicit calculation of components of complete lift of ∇ to the k-th order tangent bundle $T^kM_п$.

УДК 514.75

Е.П. Юрова

(Калининградский государственный университет)

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ И ГЛАВНЫЕ ТОЧКИ МНОГООБРАЗИЯ ГИПЕРКВАДРИК

Изучается (n-1)-мерное многообразие невырожденных центральных гиперквадрик аффинного пространства A_n. Введены понятия φ-характеристических направлений и φ-характеристических главных точек, обобщающих соответствующие понятия теории точечных отображений. Доказаны предложения, в которых раскрывается их геометрическая характеристика.

В статье [1] определены и геометрически охарактеризованы порождаемые многообразием V_{n-1} в 1-й дифференциальной окрестности центра С гиперквадрики Q аффинные связности 💣, g, γ, $\overset{0}{\gamma}$. Тензор деформации $T^k_{ij} = -\frac{1}{2}a^{kt}b_{ijk}$ $(i,...=\overline{1,n-1})$ также задает на поверхности (С) аффинную связность. Обозначим ее буквой Т. Объектом 1-го порядка $\{a_{ij}, b_{ijk}\}$ многообразия V_{n-1} для каждой точки $A\in(C)$ определяются алгебраические многообразия

$$(b_{tij}-\tfrac{1}{2}b_{ijt})x^ix^j-2a_{tl}x^l=0, \tag{1}$$

$$b_{tij}x^ix^j-2a_{tl}x^l=0, \tag{2}$$

$$b_{ijt}x^ix^j+4a_{tl}x^l=0. \tag{3}$$

Обозначим их соответственно символами I_g, I_γ, I_T. Пусть φ принимает значения g, γ, Т. Многообразие I_φ содержит точку А и в общем случае является алгебраическим многообразием размерности 0 и порядка 2^{n-1}, лежащим в касательной к поверхности (С) в точке А гиперплоскости Γ_Q. Рассмотрим множество χ_φ прямых, содержащих точку А и имеющих с многообразием I_φ 2 общие точки.

Определение 1. Прямая множества χ_φ называется φ-характеристической прямой многообразия V_{n-1} в точке А, а задаваемое этой прямой направление – φ-характеристическим направлением многообразия V_{n-1} в точке А.

Из (1) – (3) вытекает, что в общем случае в точке A имеется 2^{n-1}-1 φ-характеристических направлений.

Предложение 1. *Задаваемое вектором* $\overline{V}=\{\Lambda^i\}$ *в точке A направление является φ-характеристическим направлением многообразия* V_{n-1} *в том и только в том случае, если определяющие в точке A это направление геодезические связности и φ имеют в ней геометрическое касание 2-го порядка.*

Доказательство. Уравнения геодезических связностей 💣, g, γ, T, отнесенных к каноническому параметру, можно записать в виде:

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad} \tag{4}$$

$$x^i = \Lambda^i t + \tfrac{1}{2} g^i_{jk}\Lambda^j\Lambda^k t^2 + \langle 3\rangle, \tag{5}$$

$$x^i = \Lambda^i t + \tfrac{1}{2} \gamma^i_{jk}\Lambda^j\Lambda^k t^2 + \langle 3\rangle, \tag{6}$$

$$x^i = \Lambda^i t + \tfrac{1}{2} T^i_{jk}\Lambda^j\Lambda^k t^2 + \langle 3\rangle. \tag{7}$$

Теперь доказательство проводится так же, как для теоремы 4.1 [2].

Пусть π – проекция на T_Q вдоль нормали ν_Q. Уравнения кривых ☹ $=\pi\circ l$ и ☹$_\varphi=\pi\circ l_\varphi$ совпадают в нашем репере с уравнениями (4) – (7). Уравнения $y^i = x^i + \frac{1}{2} g^i_{jk}x^j x^k + \langle 3\rangle$ определяют струю $\overline{\Psi}_g$ отображений Ψ: $T_Q \to T_Q$, $\Psi_g(A)=A$, $d\Psi_g=id$ и обладающих свойством: кривые ☹$_g$: $\mathbf{R}\to T_Q$ и $\Psi_Q\circ$☹ : $\mathbf{R}\to T_Q$ имеют в точке A аналитическое касание 2-го порядка. Пусть $\overline{A}_n$ – расширенное аффинное пространство, соответствующее пространству A_n и $\Pi_{n-1}\subset\overline{A}_n$ – несобственная гиперплоскость. Следуя [2], приходим к следующему понятию.

Определение 2. Точка $B\in T_Q$ называется g-главной относительно точки A точкой многообразия V_{n-1}, если существует касательная к $\Psi\in\overline{\Psi}$ коллинеация $K(P_i)$ такая, что прямая AB является $K(P_i)$-главной и $K(P_i)(B)\in\Pi_{n-1}$.

Аналогично определяются γ-главные и T-главные точки многообразия V_{n-1}. Множество φ-главных точек (относительно точки A) и множество, состоящее из точки A, обозначим соответственно символами 💣 $_\varphi$ и {A}.

Предложение 2. *Справедлива формула* 💣$_\varphi=I_\varphi\backslash\{A\}$.

Доказательство аналогично доказательству 5.1 [2].

Следствие. *На каждой прямой, определяющей φ-характеристическое направление в точке A, существует единственная φ-главная точка (относительно A).*

Замечание. Если φ-главная точка $B\notin\Pi_{n-1}$, то можно говорить о φ-главном векторе $\overline{b}=\overline{AB}$.

Предложение 3. *Если для данной точки A множество γ-главных точек образует несобственную гиперплоскость* 💣$_\gamma=\Pi_{n-1}$. *То для g-главных и T-главных точек это также выполняется*:

$$💣_g=\Pi_{n-1},\ 💣_T=\Pi_{n-1}. \qquad (8)$$

Доказательство. Из 💣$_\gamma=\Pi_{n-1}$ и (2) вытекает: $b_{t(ij)}=0$, т.е. $b_{tij}=b_{t[ij]}$. Из последнего условия, учитывая $b_{ijk}=b_{jik}$, получаем $b_{ijk}=-b_{ijk}$, что означает $b_{ijk}=0$. Из (1) и (3) теперь вытекает 💣$_g=$ 💣$_T=\Pi_{n-1}$.

Предложение 4. *Если тензор* $\{b_{ijk}\}$ *симметричен по всем индексам и вектор* $\overline{V}$ *является γ-главным вектором, то векторы* $2\overline{V}$ *и* $-2\overline{V}$ *являются соответственно g-главным и T-главным вектором.*

Доказательство вытекает из формул (1) – (3) и предложения 2.

Список литературы

1. *Юрова Е.П.* Аффинные связности на многообразии центральных гиперквадрик // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1996. № 27. С. 145 – 150.
2. *Андреев Б.А.* Структуры теории точечных соответствий в геометрии гиперполос // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1996. № 27. С. 9 – 16.

E.P. Yurova

CHARACTERISTIC DIRECTIONS AND PRINCIPAL POINTS OF HYPERQUADRIC MANIFOLD

(n-1)-dimensional manifold of non-degenerate centric hyperquadric is investigated in the affine space. We introduce the notions of φ-characteristic direction and φ-characteristic principal points, generalizing the corresponding notions in the theory of point mapping. Their geometric characteristic is found.

СЕМИНАР
по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском госуниверситете

В предыдущих выпусках сборника освещена работа семинара по 23 декабря 1999 года. Ниже приводится перечень докладов, обсужденных на семинаре в 2000 году.

17.02.2000 *О.М.Жовтенко.* Оснащение Бортолотти конгруэнции плоскостей.

24.02.2000. *Ю.И.Шевченко*. Обзор книг по современной дифференциальной геометрии.

2.03.2000. *О.М.Жовтенко*. Связности конгруэнции плоскостей проективного пространства.

9.03.2000 *Ю.И.Шевченко.* Обзор книг по современной дифференциальной геометрии.