УДК 514.764.4

О. О. Белова[1]

[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*

olgaobelova@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-4

Центрированные плоскости в пространстве проективной связности

В пространстве проективной связности Картана исследуется пространство Π^* центрированных m-мерных плоскостей. В присоединенном главном расслоении $G\left(\Pi^*\right)$ способом Лаптева — Лумисте задается связность. Найдены дифференциальные сравнения компонент объекта связности. Показано, что объект групповой связности образует квазитензор, содержащий четыре подквазитензора, которые задают связности в соответствующих фактор-расслоениях.

Ключевые слова: пространство проективной связности, пространство центрированных плоскостей, расслоение, связность.

Проективное пространство P_n представляет собой фактор-пространство $L_{n+1}/\sim$ линейного пространства L_{n+1} по отношению эквивалентности (коллинеарности) $\sim$ ненулевых векторов, то есть $P_n = \left(L_{n+1} \setminus \{0\}\right)/\sim$ (см., напр., [12]). Проективное пространство P_n является многообразием размерности n.

Пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ [5] было введено им как n-мерное многообразие, с каждой точкой которого связано касательное пространство, являющееся цен-

---

Поступила в редакцию 03.04.2020 г.

тропроективным пространством P_n, причем каждой паре бесконечно близких точек соответствует проективное отображение, которое служит аналогом параллельного переноса вектора пространства аффинной связности [1].

Пространство $P_{n,n}$ является n-мерным дифференцируемым многообразием M_n, с каждой точкой которого ассоциировано n-мерное проективное пространство P_n, содержащее эту точку. Таким образом, многообразие M_n выступает базой, а пространство P_n — n-мерным слоем, «приклеенным» к точкам базы [5]. В [8] показано, что задание фундаментально-групповой связности в главном расслоении, типовым слоем которого является проективная группа, превращает данное расслоение в пространство общей проективной связности. Кроме того, в той же работе построена иерархия пространств проективной связности.

Пространство $P_{n,n}$ есть главное расслоение $G_{n(n+1)}\left(M_n\right)$ над базой M_n, типовым слоем служит группа $G_{n(n+1)}$, действующая эффективно в каждом центропроективном пространстве $P_n^0\left(x\right)$, приклеенном к базе M_n в точке $x \in M_n$. При этом $P_{n,n}$ не является пространством со связностью главного расслоения [3].

В работе [11] пространство Π^* центрированных m-мерных плоскостей P_m^* исследовалось в n-мерном проективном пространстве, при этом плоскость P_m^* — это точка пространства Π^*. Теперь пространство Π^* будем рассматривать в каждом слое $P_n^0\left(x\right)$, причем центры плоскостей P_m^* совпадают с точкой x.

Отнесем пространство центрированных плоскостей к подвижному реперу $\{A, A_i\}$ $(i,\ldots=\overline{1,n})$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^i A_i\,,\ dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i A\,,$$

причем формы Пфаффа ω^i, ω_i, ω_j^i удовлетворяют структурным уравнениям ([9], ср. [2; 4; 6; 7; 13])

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + S_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k \ \ (i, \ldots = \overline{1, n}),$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + R_{jkm}^i \omega^k \wedge \omega^m,$$

$$D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + R_{ijk} \omega^j \wedge \omega^k,$$

при этом компоненты объекта кривизны $R = \left\{ S_{jk}^i, R_{jkm}^i, R_{ijk} \right\}$ антисимметричны, то есть $S_{(jk)}^i = 0$, $R_{j(km)}^i = 0$, $R_{i(jk)} = 0$, где круглые скобки означают симметрирование $S_{(jk)}^i = \frac{1}{2}\left(S_{jk}^i + S_{kj}^i \right)$.

Следует заметить, что деривационные формулы для проективных реперов в пространстве $P_{n,n}$ имеют аналогичный вид, что и в пространстве P_n, но структурные уравнения — более сложный вид [1].

Помещаем вершины A, A_a на m-плоскость P_m^*, причем вершину A — в центр x (здесь и в дальнейшем индексы принимают значения $a, \ldots = \overline{1, m}$; $\alpha, \ldots = \overline{m+1, n}$).

Базисными формами пространства центрированных плоскостей являются формы ω^α, ω_a^α, ω^a, число которых определяет размерность пространства Π^*:

$$\dim \Pi^* = n + m\left(n - m \right).$$

Замечание. Размерность пространства Π^* отличается от размерности многообразия Грассмана $Gr\left(m, n \right)$ (пространства всех m-мерных плоскостей) на величину m, то есть $\dim \Pi^* = \dim Gr\left(m, n \right) + m$, причем $m, n \in Z$ и $0 < m < n$.

Связь рассматриваемого пространства центрированных плоскостей с многообразием Грассмана $Gr(m,n)$ важна, поскольку многообразие Грассмана играет важную роль в геометрии и топологии, будучи базисным пространством универсального векторного расслоения. Кроме того, проективное пространство P_n можно представить как многообразие $Gr(1,n+1)$. Многообразие Грассмана [10] является пространством подпространств, погруженных в пространство более высокой размерности.

Структурные уравнения присоединенного расслоения $G(\Pi^*)$ пространства проективной связности Картана для пространства центрированных плоскостей имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
D\omega^{\alpha} &= -\omega^{\alpha}_{\beta}\wedge\omega^{\beta}+\omega^{a}\wedge\omega^{\alpha}_{a}+S^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}+S^{\alpha}_{ab}\omega^{a}\wedge\omega^{b}+\\
&\quad +2S^{\alpha}_{a\beta}\omega^{a}\wedge\omega^{\beta},\\
D\omega^{a} &= -\omega^{a}_{b}\wedge\omega^{b}-\omega^{a}_{\alpha}\wedge\omega^{\alpha}+S^{a}_{bc}\omega^{b}\wedge\omega^{c}+S^{a}_{\alpha\beta}\omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta}+\\
&\quad +2S^{a}_{b\alpha}\omega^{b}\wedge\omega^{\alpha},\\
D\omega^{\alpha}_{a} &= \left(\delta^{\alpha}_{\beta}\omega^{b}_{a}-\delta^{b}_{a}\omega^{\alpha}_{\beta}\right)\wedge\omega^{\beta}_{b}+\omega_{a}\wedge\omega^{\alpha}+R^{\alpha}_{a\beta\gamma}\omega^{\beta}\wedge\omega^{\gamma}+\\
&\quad +R^{\alpha}_{abc}\omega^{b}\wedge\omega^{c}+2R^{\alpha}_{ab\beta}\omega^{b}\wedge\omega^{\beta};
\end{aligned}\tag{1}$$

Замечание. Первые два уравнения системы (1) являются уравнениями базы M_n, а уравнения для форм ω^{α}_{a} дополняют M_n до расширенной базы Π^*. Вся система (1) задает расслоение Π^*.

$$\begin{aligned}
D\omega^{a}_{b} &= \omega^{c}_{b}\wedge\omega^{a}_{c}-\omega^{a}_{\alpha}\wedge\omega^{\alpha}_{b}+\delta^{a}_{b}\omega_{\alpha}\wedge\omega^{\alpha}+\left(\delta^{a}_{b}\omega_{c}+\delta^{a}_{c}\omega_{b}\right)\wedge\omega^{c}+\\
&\quad +R^{a}_{b\alpha\beta}\omega^{\alpha}\wedge\omega^{\beta}+R^{a}_{bce}\omega^{c}\wedge\omega^{e}+2R^{a}_{bc\alpha}\omega^{c}\wedge\omega^{\alpha},
\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}
D\omega^{\alpha}_{\beta} &= \omega^{\gamma}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{\gamma}+(\delta^{\alpha}_{\beta}\omega_{\gamma}+\delta^{\alpha}_{\gamma}\omega_{\beta})\wedge\omega^{\gamma}+\omega^{a}_{\beta}\wedge\omega^{\alpha}_{a}+\delta^{\alpha}_{\beta}\omega_{a}\wedge\omega^{a}+\\
&\quad +R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma}\wedge\omega^{\mu}+R^{\alpha}_{\beta ab}\omega^{a}\wedge\omega^{b}+2R^{\alpha}_{\beta a\gamma}\omega^{a}\wedge\omega^{\gamma},
\end{aligned}\tag{3}$$

$$D\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b - \omega_\alpha \wedge \omega_a^\alpha + R_{a\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta + R_{abc}\omega^b \wedge \omega^c +$$

$$+2R_{ab\alpha}\omega^b \wedge \omega^\alpha , \qquad (4)$$

$$D\omega_\alpha^a = \left(\delta_b^a \omega_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta \omega_b^a\right) \wedge \omega_\beta^b + \omega_\alpha \wedge \omega^a + R_{\alpha\beta\gamma}^a \omega^\beta \wedge \omega^\gamma +$$

$$+R_{\alpha bc}^a \omega^b \wedge \omega^c + 2R_{\alpha b\beta}^a \omega^b \wedge \omega^\beta , \qquad (5)$$

$$D\omega_\alpha = \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta + \omega_\alpha^a \wedge \omega_a + R_{\alpha\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma + R_{\alpha ab}\omega^a \wedge \omega^b +$$

$$+2R_{\alpha a\beta}\omega^a \wedge \omega^\beta .$$

Теорема 1. Расслоение $G\left(\Pi^*\right)$ содержит четыре фактор-расслоения над Π^*:

1) фактор-расслоение плоскостных линейных реперов $L_{m^2}\left(P_{n,\,n}\right)$ со структурными уравнениями (1), (2);

2) фактор-расслоение нормальных линейных реперов $\mathfrak{L}_{(n-m)^2}\left(P_{n,\,n}\right)$ со структурными уравнениями (1), (3);

3) фактор-расслоение плоскостных коаффинных реперов $C_{m(m+1)}\left(P_{n,\,n}\right)$ со структурными уравнениями (1), (2), (4);

4) аффинное фактор-расслоение $H_{n(n-m)+m^2}\left(P_{n,\,n}\right)$ со структурными уравнениями (1)—(3), (5).

Слоевыми формами фактор-расслоения плоскостных линейных реперов $L_{m^2}\left(P_{n,\,n}\right)$ являются формы ω_b^a. Типовым слоем данного расслоения является линейная факторгруппа $L_{m^2} = GL(m) \subset G$, которая действует в пучке прямых, принадлежащих плоскости P_m^*.

Слоевыми формами фактор-расслоения $\mathfrak{L}_{(n-m)^2}\left(P_{n,\,n}\right)$ являются формы ω_β^α. Данное расслоение — двойственное для фактор-расслоения плоскостных линейных реперов. Типовой слой расслоения $\mathfrak{L}_{(n-m)^2}\left(P_{n,\,n}\right)$ — линейная факторгруппа

$$\mathfrak{L}_{(n-m)^2} = GL(n-m) \subset G,$$

которая действует неэффективно в проективном факторпространстве $\mathcal{P}_{n-m-1} = P_n \,/\, P_m^*$.

Пространство $\mathcal{P}_{n-m-1}$ можно представить в виде

$$\mathcal{P}_{n-m-1} = G_{(n-m-1)(n-m+1)} \,/\, GA^*\left(n-m-1\right) \text{ (ср. [8]),}$$

где $G_{(n-m-1)(n-m+1)}$ — проективная группа, а $GA^*\left(n-m-1\right)$ — коаффинная (центропроективная) подгруппа проективной группы $G_{(n-m-1)(n-m+1)}$.

Слоевые формы фактор-расслоения $C_{m(m+1)}\left(P_{n,\,n}\right)$ — это формы ω_b^a, ω_a. Плоскостные коаффинные реперы принадлежат центрированной плоскости P_m^*. Коаффинная (центропроективная) факторгруппа $C_{m(m+1)} = GA^*\left(m\right) \subset G$, действующая на плоскости P_m^*, является типовым слоем фактор-расслоения $C_{m(m+1)}\left(P_{n,\,n}\right)$.

Формы ω_b^a, ω_β^α, ω_α^a — это слоевые формы аффинного фактор-расслоения. Типовым слоем расслоения $H_{n(n-m)+m^2}\left(P_{n,\,n}\right)$ является аффинная факторгруппа $H_{n(n-m)+m^2}$ группы $G \subset GP(n)$, действующая в пучке прямых с центром в точке A.

В присоединенном расслоении $G\left(\Pi^*\right)$ зададим фундаментально-групповую связность способом Лаптева — Лумисте:

$$\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Pi_{b\alpha}^a \omega^\alpha - \Pi_{bc}^a \omega^c - \Pi_{b\alpha}^{ac} \omega_c^\alpha$$

$$\tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Pi_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma - \Pi_{\beta a}^\alpha \omega^a - \Pi_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega_a^\gamma,$$

$$\tilde{\omega}_a = \omega_a - \Pi_{a\alpha} \omega^\alpha - \Pi_{ab} \omega^b - L_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha,$$

$$\tilde{\omega}_\alpha^a = \omega_\alpha^a - \Pi_{\alpha\beta}^a \omega^\beta - \Pi_{\alpha b}^a \omega^b - \Pi_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta ,$$

$$\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - \Pi_{\alpha\beta} \omega^\beta - \Pi_{\alpha a} \omega^a - L_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta ,$$

причем функции

$$\Pi = \left\{ \Pi_{b\alpha}^a,\ \Pi_{bc}^a,\ \Pi_{b\alpha}^{ac},\ \Pi_{\beta\gamma}^\alpha,\ \Pi_{\beta a}^\alpha,\ \Pi_{\beta\gamma}^{\alpha a},\ \Pi_{a\alpha},\right.$$

$$\left. \Pi_{ab},\ L_{a\alpha}^b,\ \Pi_{\alpha\beta}^a,\ \Pi_{\alpha b}^a,\ \Pi_{\alpha\beta}^{ab},\ \Pi_{\alpha\beta},\ \Pi_{\alpha a},\ L_{\alpha\beta}^a \right\}$$

удовлетворяют следующим дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм ω^α, ω_a^α, ω^a:

$$\Delta \Pi_{b\alpha}^a - \Pi_{bc}^a \omega_\alpha^c + \Pi_{b\alpha}^{ac} \omega_c - \delta_b^a \omega_\alpha \equiv 0,\ \Delta \Pi_{bc}^a - \delta_c^a \omega_b - \delta_b^a \omega_c \equiv 0,$$

$$\Delta \Pi_{b\alpha}^{ac} + \delta_b^c \omega_\alpha^a \equiv 0 ,$$

$$\Delta \Pi_{a\alpha} - \Pi_{ab} \omega_\alpha^b + (L_{a\alpha}^b + \Pi_{a\alpha}^b) \omega_b \equiv 0,\ \Delta \Pi_{ab} + \Pi_{ab}^c \omega_c \equiv 0,$$

$$\Delta L_{a\alpha}^b + \Pi_{a\alpha}^{cb} \omega_c + \delta_a^b \omega_\alpha \equiv 0 ,$$

$$\Delta \Pi_{\alpha\beta}^a - \Pi_{\alpha b}^a \omega_\beta^b + \Pi_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b - \Pi_{b\beta}^a \omega_\alpha^b + \Pi_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma^a \equiv 0 ,$$

$$\Delta \Pi_{\alpha b}^a - \Pi_{cb}^a \omega_\alpha^c + \Pi_{\alpha b}^\beta \omega_\beta^a - \delta_b^a \omega_\alpha \equiv 0,\ \Delta \Pi_{\alpha\beta}^{ab} - \Pi_{c\beta}^{ab} \omega_\alpha^c + \Pi_{\alpha\beta}^{\gamma b} \omega_\gamma^a \equiv 0 ,$$

$$\Delta \Pi_{\beta\gamma}^\alpha - \Pi_{\beta a}^\alpha \omega_\gamma^a + \Pi_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega_a - \delta_\beta^\alpha \omega_\gamma - \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta \equiv 0,$$

$$\Delta \Pi_{\beta a}^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_a \equiv 0,\ \Delta \Pi_{\beta\gamma}^{\alpha a} - \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta^a \equiv 0,$$

$$\Delta \Pi_{\alpha\beta} - \Pi_{\alpha a} \omega_\beta^a + (L_{\alpha\beta}^a + \Pi_{\alpha\beta}^a) \omega_a - \Pi_{a\beta} \omega_\alpha^a + \Pi_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma \equiv 0,$$

$$\Delta \Pi_{\alpha a} - \Pi_{ba} \omega_\alpha^b + \Pi_{\alpha a}^b \omega_b + \Pi_{\alpha a}^\beta \omega_\beta \equiv 0,$$

$$\Delta L_{\alpha\beta}^a + \Pi_{\alpha\beta}^{ba} \omega_b - L_{c\beta}^a \omega_\alpha^c + \Pi_{\alpha\beta}^{\gamma a} \omega_\gamma \equiv 0 .$$

Теорема 2. Объект групповой связности Π в присоединенном расслоении $G\left(\Pi^*\right)$ пространства проективной связности Картана $P_{n,n}$ является квазитензором, который содержит четыре подквазитензора

$$\varPi_1 = \left\{ \varPi^a_{b\alpha},\ \varPi^a_{bc},\ \varPi^{ac}_{b\alpha} \right\},$$

$$\varPi_2 = \left\{ \varPi^\alpha_{\beta\gamma},\ \varPi^\alpha_{\beta a},\ \varPi^{\alpha a}_{\beta\gamma} \right\},$$

$$\varPi_3 = \left\{ \varPi_1,\ \varPi_{a\alpha},\ \varPi_{ab},\ L^b_{a\alpha} \right\},$$

$$\varPi_4 = \left\{ \varPi_1,\ \varPi_2,\ \varPi^a_{\alpha\beta},\ \varPi^a_{\alpha b},\ \varPi^{ab}_{\alpha\beta} \right\},$$

задающие связности в соответствующих фактор-расслоениях.

Список литературы

1. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Эли Картан (1869–1951). М., 2014.
2. *Башашина К.В.* Пространство проективной связности Картана как главное расслоение без связности // Классическая и современная геометрия : матер. Междунар. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения В.Т. Базылева. М., 2019. С. 57—59.
3. *Башашина К.В.* Тензорность объекта кривизны связности в главном расслоении пространства проективной связности Картана // ДГМФ. Калининград, 2019. №50. С. 36—40.
4. *Близникас В.И.* О неголономной поверхности трехмерного пространства проективной связности // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1971. Т. 3. С. 115—124.
5. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.
6. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. 1971. Т. 3. С. 49—94.
7. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.
8. *Шевченко Ю.И.* Иерархия пространств проективной связности // ДГМФ. Калининград, 2018. №49. С. 178—192.
9. *Шевченко Ю.И.* Центропроективная связность в пространстве проективной связности Картана // ДГМФ. Калининград, 2005. №36. С. 154—160.
10. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Projective differential geometry of submanifolds // North-Holland Mathematical Library. Vol. 49. Amsterdam, 1993.

11. *Belova O.* Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes // Journal of Mathematical Sciences (New York). 2009. Vol. 162, №5. P. 605—632.
12. *Benini F.* Basics of Differential Geometry & Group Theory : PhD thesis / SISSA. Trieste, 2018.
13. *Scholz E.* H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal, 2010.

O. O. Belova[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2020-51-4

Centered planes in the projective connection space

Submitted on April 3, 2020

The space Π^* of centered planes is considered in the Cartan projective connection space $P_{n,n}$. The space Π^* is important because it has connection with the Grassmann manifold, which plays an important role in geometry and topology, since it is the basic space of a universal vector bundle.

The space $P_{n,n}$ is an n-dimensional differentiable manifold V_n with each point of which an n-dimensional projective space P_n containing this point is associated. Thus, the manifold V_n is the base, and the space P_n is the n-dimensional fiber "glued" to the points of the base.

A projective space P_n is a quotient space $L_{n+1} / \sim$ of a linear space L_{n+1} with respect to the equivalence (collinearity) of non-zero vectors, that is $P_n = \left(L_{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim$. The projective space P_n is a manifold of dimension n.

In this paper we use the Laptev — Lumiste invariant analytical method of differential geometric studies of the space Π^* of centered planes and introduce a fundamental-group connection in the associated bundle $G\left(\Pi^*\right)$. The bundle $G\left(\Pi^*\right)$ contains four quotient bundles. It is show that the connection object Π is a quasi-tensor containing four subquasi-tensors that define connections in the corresponding quotient bundles.

Keywords: projective connection space, space of centered planes, fibering, connection.

References

1. *Akivis, M.A., Rosenfeld, B.A.*: Eli Cartan (1869—1951). Moscow (2014).

2. *Bashashina K. V.* The space of projective connection of Cartan as the principal bundle without connection. Classical and modern geometry. Materials of the international conference dedicated to the centenary of V. T. Bazylev's birth. Moscow. 57—59 (2019).

3. *Bashashina K. V.* Curvature tensor of connection in principal bundle of Cartan's projective connection space. DGMF. Kaliningrad. 50, 36—40 (2019).

4. *Bliznikas V.I.* A non-holonomic surface of a three-dimensional space with projective connection // Tr. Geom. Sem., 3, 115—124 (1971).

5. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu.G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

6. *Laptev G.F., Ostianu N.M.* Distributions of *m*-dimensional line elements in a space with projective connection. I. Tr. Geom. Sem., 3, 49—94 (1971).

7. *Stolyarov A. V.* The dual theory of equipped manifolds. Cheboksary (1994).

8. *Shevchenko, Yu.I.:* Hierarchy of spaces of projective connection. DGMF. Kaliningrad. 49, 178—192 (2018).

9. *Shevchenko, Yu.I.:* Centro-projective connection in Cartan's projective connection space. DGMF. Kaliningrad. 36, 154—160 (2005).

10. *Akivis, M.A., Goldberg, V. V.*: Projective differential geometry of submanifolds. In North-Holland Mathematical Library. Amsterdam. 49 (1993).

11. *Belova, O.:* Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centred planes. J. Math. Sci. (New York), **162**:5, 605—632 (2009).

12. *Benini, F.*: Basics of Differential Geometry & Group Theory. PhD thesis. SISSA. Trieste (2018).

13. *Scholz, E.*: H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal (2010).