УДК 517.4

М. В. Кретов

О СЛАБО ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Исследуются свойства слабо почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве.

Properties of poorly almost periodic functions with values in Banach space are researched.

Ключевые слова: почти периодическая функция, слабо почти периодическая функция, банахово пространство, функционал, конечное ε-деление пространства, норма, компактное множество, равностепенная непрерывность.

Key words: almost periodic function, poorly almost periodic function, Banach space, functionality, finite ε- division of space, norm, compact set, equipotential continuity.

Продолжается исследование почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве [1—5].

Определение 1. Функция $f(t)$ со значениями в банаховом пространстве E *слабо почти периодическая* [6], если на любом линейном функционале [7] функция $\varphi(t) = l(f(t))$ является почти периодической.

Для слабо почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Если $f(t)$ — слабо почти периодическая функция со значениями в банаховом пространстве E, то множество ее значений ограничено.*

Доказательство. Так как $\left|l(f(t))\right| < M$ для любого числа t, то согласно теореме Банаха — Штейнгауса, нормы функционалов l также будут ограничены, ⩽то есть $\left|l(f(t))\right| \leqslant \|l\|\|f(t)\| \leqslant \sup\|l\| \cdot \|f(t)\| < M$ для некоторого конечного числа $M > 0$, значит, $\|f(t)\| < \dfrac{M}{\sup\|l\|}$, где норма $\sup\|l\|$ ограничена.

Без ограничения общности можно считать, что $\sup\|l\| \neq 0$, следовательно, теорема доказана. □

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. Вып. 10. С. 168 – 170.

Теорема 2. Если последовательность слабо почти периодических функций $f_n(t)$ сходится слабо к функции $f(t)$ равномерно относительно переменной t, то функция $f(t)$ слабо почти периодична.

Доказательство этой теоремы следует из неравенства

$$|l(f(t+\tau)-f(t))| \leqslant |l(f(t+\tau)-f_n(t+\tau))| + |l(f_n(t+\tau)-f_n(t))| + |l(f_n(t)-f(t))|. \quad \square$$

Теорема 3. Если функция $f(t)$ слабо почти периодична и последовательность $f(t+s_n)$ слабо сходится к функции $f_*(t)$ при всех t, то она сходится равномерно относительно t.

Доказательство. Согласно условию теоремы последовательность функций $f(t+s_n)$ слабо сходится к функции $f_*(t)$ при всех t, значит, на любом линейном функционале последовательность почти периодических функций $\varphi(t+s_n) = l(f(t+s_n))$ сходится к функции $\varphi_*(t) = l(f_*(t))$ при всех t. Это означает, что ряды Фурье [8] для функций $\varphi(t+s_n)$ сходятся к ряду Фурье функции $\varphi_*(t)$, то есть если функциям $\varphi(t+s_n)$ соответствуют ряды Фурье $\sum_\alpha A_\alpha e^{i s_n \Lambda_\alpha} e^{i \Lambda_\alpha x}$, то функции $\varphi_*(t)$ соответствует ряд Фурье $\sum_\alpha A_\alpha e^{i s_\alpha^*} e^{i A_\alpha x}$, где $s_\alpha^* = \lim_{n\to\infty} \Lambda_\alpha s_n \pmod{2\pi}$, то есть имеет место формальная сходимость рядов Фурье. Потому согласно работе [9] формальная сходимость рядов Фурье в множестве сдвинутых функций $H(\varphi(t+h))$ совпадает с равномерной сходимостью. Следовательно, $\sup_t |\varphi(t+s_n)-\varphi_*(t)| < \varepsilon$, где ε — любое положительное число. $\square$

Для доказательства следующей теоремы понадобятся понятия конечного ε-деления пространства и теорема об ε-делении [6].

Определение 2. *Конечным ε-делением* пространства Z, соответствующим семейству функций $\{f(z)\}$, где $z \in Z$, называется такое разложение Z в сумму конечного числа множеств $Z = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$, что для любой $f(z)$ из рассматриваемого семейства и любых точек $z', \ldots, z''$ из множества U_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) выполняется неравенство $|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$..

Теорема об ε-делении. Для того чтобы семейство ограниченных в совокупности функций $\{f(z)\}$, заданных в пространстве Z, было компактным [7] (в смысле равномерной сходимости на множестве Z), необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало конечное ε-деление пространства Z, соответствующее семейству $\{f(z)\}$.

Теорема 4. Если функция $f(t)$ является слабо почти периодической и множество ее значений относительно компактно [7], то функция $f(t)$ почти периодична.

Доказательство. Обозначим через Φ единичную сферу сопряженного пространства E^*. Пусть φ — произвольный элемент из Φ. Рассмотрим функцию $F(\varphi, t) = \varphi(f(t))$ и покажем, что семейство функций $F(\varphi, t)$ компактно в смысле равномерной сходимости на Φ. Действительно, если набор функций $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n)$ является конечной ε-сетью для функции $f(t)$, то набор функций $F(\varphi, t_1), F(\varphi, t_2), \ldots, F(\varphi, t_n)$ — конечной ε-сетью для семейства $F(\varphi, t)$ (t — параметр). Тогда согласно теореме об ε-делении семейство $F(\varphi, t)$ компактно в смысле равномерной сходимости на всей прямой. Поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ существуют элементы φ_1, φ_2, …, φ_m из сферы Ф такие, что для любого элемента φ из области Ф найдется такой элемент φ_k ($k = 1, 2, \ldots, m$), для которого

$$\sup_t |F(\varphi, t) - F(\varphi_k, t)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Так как при любом фиксированном номере k функция $F(\varphi_k, t)$ является почти периодической, то из формулы (1) следует, что семейство функций $F(\varphi, t)$ является равностепенно непрерывным [7] и равностепенно почти периодическим [6].

Пусть $\tau = \tau_\varepsilon$ есть общий ε-почти период для семейства функций $F(\varphi, t)$, то есть для любого числа $\varepsilon > 0$ $\sup_t |F(\varphi, t+\tau) - F(\varphi, t)| < \varepsilon$ для всех элементов φ из множества Ф. Тогда в силу теоремы Хана — Банаха [7] при фиксированных переменных t и τ имеем:

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| = \sup_{\varphi\in\Phi} |F(\varphi, t+\tau) - F(\varphi, t) < \varepsilon.$$

Аналогично доказывается непрерывность функции $f(t)$, следовательно, функция $f(t)$ почти периодична. □

Список литературы

1. *Кретов М. В.* О почти периодических функциях со значениями в банаховом пространстве // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. Калининград, 2010. Вып. 4. С. 162—166.
2. *Кретов М. В., Виноградова Н. В., Воротникова О. В.* О почти периодичности преобразования Бохнера // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. Калининград, 2010. Вып. 10. С. 160—162.
3. *Кретов М. В.* О приближении почти периодической функции со значениями в банаховом пространстве // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Калининград, 2012. Вып. 4. С. 148—150.
4. *Кретов М. В., Лейцин В. Н., Малаховский В. С. и др.* Математическое моделирование почти периодической функции конусами банахова пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Калининград, 2012. Вып. 10. С. 141—143.
5. *Кретов М. В., Малаховский В. С., Сёменов В. И. и др.* Математическое моделирование почти периодической функции со значениями в банаховом пространстве мультипликаторами // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Калининград, 2013. Вып. 4. С. 106—109.
6. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. М., 1953.
7. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., 1968.
8. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Т. 3. М., 2003.
9. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.

Об авторе

Михаил Васильевич Кретов — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: kretov1@mail.ru

About the author

Dr Mikhail Kretov — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: kretov1@mail.ru