10.Столяров А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы."Изв.высш.учебн.заведений. Математика", №10, 1957, с.97-99.

11.Олоничев П.И. Общеаффинная и центрально-проективная теория гиперполосы.ДАН СССР, т.80, №2, 1951, с.165-168.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Е.В.Скрыдлова

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ТОЧКОЙ

В трехмерном проективном пространстве продолжается изучение вырожденных [1] конгруэнций $(CP)_{1,2}$, порожденных кривой второго порядка (коникой) C и точкой P, в которых многообразие коник C -однопараметрическое, а многообразие точек P -двупараметрическое [2].

Изучены некоторые новые свойства расслояемых конгруэнций $(CP)_{1,2}$.

Вырожденные конгруэнции $(CP)_{1,2}$ характеризуются взаимно неоднозначным отображением, которое каждой точке P поверхности (P) ставит в соответствие единственную конику C однопараметрического семейства (C), полным прообразом которой является линия Γ_c на поверхности (P).

Отнесем конгруэнцию $(CP)_{1,2}$ к подвижному реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, в котором вершина A_4 совпадает с точкой P, вершины A_1 и A_2 являются точками пересечения касательной плоскости к поверхности (P) с коникой C, а A_3 -полюс прямой A_1A_2 относительно коники C.

Уравнения коники C и система пфаффовых уравнений конгруэнции $(CP)_{1,2}$ в репере R ,с учетом определенной нормировки ,приводятся соответственно к виду:

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0; \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\omega_i^4=\Gamma_i^4\omega_3^4;\ \omega_i^j=\Gamma_i^j\omega_3^4,\ \omega_3^4=\lambda_k\omega^k,\\ \omega_1^3=\varphi\omega^1+\psi\omega^2,\ \omega_2^3=\psi\omega^1+\eta\omega^2,\ \omega_4^3=0,\\ \omega_3^i=\Gamma_3^i\omega_3^4+\omega_j^3,\ 2\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=p\,\omega_3^4.\end{gathered} \tag{2}$$

Формы

$$\omega_4^i=\omega^i \tag{3}$$

здесь приняты в качестве базисных линейно независимых форм,индексы i,j,k принимают значения I,2,причем $i\neq j$.

Осуществим нормировку вершин репера таким образом, чтобы единичная точка $E_{12}=A_1+A_2$ прямой A_1A_2 была инцидентна касательной к линии Γ_c в точке A_4,тогда

$$\omega_3^4=\lambda(\omega^1-\omega^2). \tag{4}$$

В работе [2] рассмотрены,так называемые,расслояемые конгруэнции $(CP)_{1,2}$,для которых прямолинейные конгруэнции (A_iA_3) односторонне расслояемы к конгруэнции касательных к линиям Γ_c и сеть линий на поверхности (P) ,огибаемая прямыми A_iA_4,сопряжена.

Аналитически расслояемые конгруэнции $(CP)_{1,2}$ характеризуются следующими условиями:

$$\begin{gathered}(\omega_i^3+\omega_j^3)\wedge\omega_i^j=0,\\ (\omega_i^i-\omega_j^j-\omega_i^j+\omega_j^i)\wedge\omega_3^j=0,\\ (\omega_i^i-\omega_j^j)\wedge\omega_j^i+(\omega_i^3+\omega_j^3)\wedge\omega_3^i=0;\end{gathered} \tag{5}$$

$$\psi=0. \tag{6}$$

(по i,j не суммировать !)

В силу невырождения прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) $(E_{12}A_4)$ в линейчатые поверхности имеем

$$(\omega_1^3+\omega_2^3)\wedge\omega_3^4\neq 0. \tag{7}$$

Система уравнений (5) в этом случае приводится к виду:

$$\omega_i^j=0, \tag{8}$$

$$(\omega_i^3+\omega_j^3)\wedge\omega_3^i=0,\quad(\omega_i^i-\omega_j^j)\wedge\omega_3^i=0, \tag{9}$$

откуда непосредственно получаем

$$\Gamma_3^1+\Gamma_3^2=0, \tag{10}$$

$$\omega_1^1-\omega_2^2=\mu(\omega_1^3+\omega_2^3). \tag{11}$$

Положим

$$\Gamma_3^1=b, \tag{12}$$

тогда

$$\omega_3^1=b\,\omega_3^4+\omega_2^3,\quad\omega_3^2=-b\,\omega_3^4+\omega_1^3, \tag{13}$$

а также

$$b\lambda(\varphi+\eta)=\varphi\eta. \tag{14}$$

Из замыкания уравнений (8) получим

$$\Gamma_2^4=\eta b,\quad\Gamma_1^4=-\varphi b. \tag{15}$$

В силу неравенства (7) последнюю нормировку вершин репера R можно осуществить таким образом,что

$$\varphi+\eta=1. \tag{16}$$

Продолжая теперь уравнений (I3),а также систему уравнений

$$\begin{gathered}\omega_1^4=-\varphi b\,\omega_3^4,\quad\omega_2^4=\eta b\,\omega_3^4.\\ \omega_1^3=\varphi\omega^1,\quad\omega_2^3=\eta\omega^2,\end{gathered} \tag{17}$$

с учетом нормировки (I6),получим

$$d\varphi+\varphi(\omega_3^3+\omega_4^4-2\omega_1^1)=p\lambda\omega^1,$$

$$[d\beta+\beta(\omega_1^1-\omega_4^4)+\rho\,\omega_2^3+\omega^1]\wedge\omega_3^4=0,$$

$$\omega_4^4-\omega_3^3=(2\varphi-1)(\omega_1^1-\omega_2^2), \qquad (18)$$

$$\beta\mu+\rho+2=0;$$

$$\rho\mu(2\varphi-1)=0, \qquad (19)$$

причем в случае

$$\rho\mu=0 \qquad (20)$$

мы приходим к противоречию.

Из соотношения (I9) тогда следует

$$2\varphi-1=0. \qquad (21)$$

С учетом равенства (2I) система пфаффовых уравнений расслояемой конгруэнции $(CP)_{1,2}$ окончательно приводится к виду

$$\omega_i^j=0,\quad \omega_i^3=\frac{1}{2}\omega^i,\quad \omega_i^4=\frac{1}{8}(\omega^j-\omega^i),\quad \omega_4^3=0,$$

$$\omega_3^i=\frac{1}{4}(\omega^i+\omega^j),\quad \omega_3^4=\lambda(\omega^1-\omega^2),\quad \omega_4^4-\omega_3^3=0 \qquad (22)$$

$$\omega_1^1-\omega_2^2=4\lambda(\omega^1+\omega^2),\quad 2\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=-4\omega_3^4,\quad d\lambda=0.$$

Замыкание системы уравнений (20) удовлетворяется тождественно, следовательно, она является вполне интегрируемой.

Для расслояемых конгруэнций $(CP)_{1,2}$ доказаны [2] следующие свойства: I/ A_i –суть характеристические точки граней $(A_iA_3A_4)$; 2/фокусы луча A_1A_2 конгруэнции (A_1A_2) гармонически разделяют вершины A_1 и A_2 репера R; 3/плоскости коник C образуют пучок; 4/фокусы луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) являются двойными точками гомографии [3] пары поверхностей (A_1) и (A_2), причем один из них $(K=A_4-2A_3)$ описывает линию, касательная к которой пересекает плоскость коники C в полюсе характеристики этой плоскости относительно коники; 5/пространственный четырехугольник $A_1A_4A_2K$ описывает конфигурацию T; 6/прямолинейные конгруэнции (A_iA_4) являются конгруэнциями W; 7/пары прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) и $(E_{12}A_4)$ двусторонне расслояемы.

Рассмотрим однопараметрический пучок квадрик Q_a, ассоциированных с парой образующих элементов расслояемой конгруэнции $(CP)_{1,2}$:

$$Q_a\equiv(x^3)^2-2x^1x^2+a(x^4)^2=0,\quad da=0. \qquad (23)$$

Геометрически каждая квадрика этого пучка характеризуется тем, что плоскость коники C и точка P относительно нее полярно сопряжены. Рассмотрим однопараметрический пучок конгруэнций (Q_a), образованных квадриками (23).

Т е о р е м а I. Характеристическое многообразие [4] каждой из конгруэнций (Q_a) представляет собой пару кривых второго порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Характеристическое многообразие конгруэнции, образованной каждой из квадрик типа (23), задается системой уравнений

$$(x^1+x^2)(x^3+x^4)=0,$$

$$4\lambda x^1x^2+\frac{3}{4}x^1x^3+\frac{1}{2}x^2x^3+x^2x^4+\frac{a}{8}(x^1-x^2)x^4-\lambda a x^3x^4=0,$$

которая определяет пару коник, расположенных в плоскостях $(E_{12}^*A_3A_4)$ и $(A_1A_2E_{34}^*)$, где $E_{12}^*=A_1-A_2$, $E_{34}^*=A_3-A_4$.

Т е о р е м а 2. Поверхность (P), ассоциированная с с расслояемой конгруэнцией $(CP)_{1,2}$, является коинцидентной поверхностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Находя директрису Вильчинского, ось Чеха и ребро Грина поверхности (P), ассоциированной с расслояемой конгруэнцией $(CP)_{1,2}$, убеждаемся, что все эти замечательные прямые совпадают между собой и определяются точками A_4 и $S=2\lambda E^*_{12}+A_3$.

Следовательно, канонический пучок поверхности (P) вырождается в прямую A_4S, а сама поверхность (P) является коинцидентной.

Список литературы

1. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.41-49.

2. Скрыдлова Е.В. Об одном классе вырожденных конгруэнций квадратичных пар.-В кн.:Украинский геометрический сборник. Вып.18, Харьков, 1975, с.126-135.

3. Фиников С.П. Асимптотически сопряженные двойные линии Ермолаева.-"Уч.зап.Моск. пед .ин-та", 1951, №16, вып.3, с. 235-260.

4. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве."Тр. геом. семинара. Всес.ин-т научн. и технич. информации", 1974, 6, с.113-133.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Е.П. С о п и н а

КОНГРУЭНЦИИ ЭЛЛИПСОИДОВ С ФОКАЛЬНОЙ КОНГРУЭНЦИЕЙ ЭЛЛИПСОВ

В трехмерном аффинном пространстве A_3 рассмотрена конгруэнция V_2 эллипсоидов, имеющая фокальную конгруэнцию эллипсов [1], но не являющаяся конгруэнцией V_2^0 [2]. Доказана теорема существования и установлены некоторые геометрические свойства таких конгруэнций. Для конгруэнций одного класса получено безынтегральное представление.

§1. Теорема существования

О п р е д е л е н и е 1.1. Конгруэнцией V_2 называется конгруэнция эллипсоидов в A_3, обладающая следующими свойствами: 1/ каждый эллипсоид $Q \in V_2$ содержит в качестве фокального многообразия эллипс C, центр A которого не совпадает с центром B эллипсоида Q; 2/ плоскости эллипсов C образуют двупараметрическое семейство, причем характеристическая точка M плоскости эллипса C не совпадает с его центром A и не принадлежит квадрике Q.

О п р е д е л е н и е 1.2. Конгруэнцией V_2^1 называется конгруэнция V_2 с невырожденной индикатрисой векторов $\overline{AB}$. Конгруэнцией V_2^2 называется конгруэнция V_2 с вырождающейся индикатрисой векторов $\overline{AB}$.

Т е о р е м а 1.1. Существуют два и только два непересекающихся класса конгруэнций V_2 конгруэнции V_2^1 и V_2^2,