ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

УДК 514.75

ГЛАВНОЕ РАССЛОЕНИЕ СО СВЯЗНОСТЬЮ, АССОЦИИРОВАННОЕ С МНОГООБРАЗИЕМ ПАРАБОЛОИДОВ

Е.А.Митрофанова
(Калининградский университет)

В n-мерном эквиаффинном пространстве A_n рассмотрим $(n-1)$-мерное многообразие (конгруэнцию) M_{n-1} [1] $(n-1)$-мерных параболоидов Q, имеющую, по крайней мере, одну невырожденную фокальную гиперповерхность $\widetilde{M}_{n-1}$. Конгруэнция M_{n-1} относится к реперу $R=\{A,\bar{e}_\alpha,\bar{e}_n\}$ $(\alpha,\beta=\overline{1,n-1})$, где A – фокальная точка параболоида Q, описывающая фокальную гиперповерхность $\widetilde{M}_{n-1}$, векторы $\bar{e}_\alpha$ расположены в касательной гиперплоскости к параболоиду в точке A, а вектор $\bar{e}_n$ направлен по его диаметру. Уравнение параболоида Q и система уравнений конгруэнции M_{n-1} имеют соответственно вид:

$$F = a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta - 2x^n = 0 \tag{1}$$

и

$$\begin{cases} \omega^n = 0, \quad \omega^n_\alpha = c_{\alpha\beta}\,\omega^\beta, \quad \omega^\alpha_n = c^\alpha_\beta\,\omega^\beta, \\ \Delta a_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta}\,\omega^\gamma_\alpha - a_{\alpha\gamma}\,\omega^\gamma_\beta + a_{\alpha\beta}\,\omega^n_n = c_{\alpha\beta,\gamma}\,\omega^\gamma. \end{cases} \tag{2}$$

Запишем уравнения структуры аффинного пространства $d\omega^K = \omega^\ell \wedge \omega^K_\ell$, $d\omega^K_i = \omega^\ell_i \wedge \omega^K_\ell$ $(i,K,\ell=\overline{1,n})$. Откуда для форм $\omega^\alpha, \omega^\beta_\alpha, \omega^n_n$ с учетом уравнений (2) получим

$$\begin{aligned} &d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta, \\ &d\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + \omega^n_\beta \wedge \omega^\alpha_n = \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma + R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\,\omega^\gamma \wedge \omega^\delta, \\ &d\omega^n_n = \omega^\alpha_n \wedge \omega^n_\alpha = R_{\beta\gamma}\,\omega^\beta \wedge \omega^\gamma, \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = c_{\beta\gamma}\,c^\alpha_\delta\,, \quad R_{\beta\gamma} = c^\alpha_\beta\,c_{\alpha\gamma}\,. \tag{4}$$

Уравнения (3) показывают, что формы ω^α_β, ω^n_n являются формами связности в касательном расслоении $T\widetilde{M}_{n-1}$ к фокальной гиперповерхности $\widetilde{M}_{n-1}$ и в трансверсальном к нему расслоении диаметров $\ell=(A,\bar{e}_n)$ соответственно. Кроме того, формы ω^α, ω^α_β составляют формы аффинной связности без кручения в том же касательном расслоении, $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ – кривизна аффинной связности, $R_{\beta\gamma}$ – кривизна расслоения диаметров. Базой этих расслоений является фокальная гиперповерхность $\widetilde{M}_{n-1}$ или многообразие параболоидов M_{n-1}. Формы $\omega^\alpha_\beta, \omega^n_n$ можно интерпретировать как формы линейной связности на произведении указанных расслоений по базе M_{n-1}. Классическая интерпретация этой связности состоит в следующем параллельном проектировании: во-первых, направления плоскости $T_{n-1}+dT_{n-1}$, смежной к касательной гиперплоскости, на исходную гиперплоскость T_{n-1} параллельно диаметру ℓ; во-вторых, двойственной конструкцией, т.е. проектированием прямой $\ell+d\ell$, смежной к диаметру ℓ, на саму прямую ℓ параллельно касательной гиперплоскости T_{n-1}.

Кривизны $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ и $R_{\beta\gamma}$, как видно из (4), связаны соотношением $R_{\beta\gamma}=R^\alpha_{\alpha\beta\gamma}$ и вместе с основным объектом $\{a_{\alpha\beta}; c_{\alpha\beta,\gamma}; c^\alpha_\beta; c_{\alpha\beta}\}$ и их ковариантными производными могут служить основанием для классификации конгруэнции параболоидов. Выделим некоторые из этих классов конгруэнций:

а) $R_{\beta\gamma}=0, R^\alpha_{\beta\gamma\delta}=0$. Этот класс характеризуется плоской связностью в расслоении диаметров;

б) $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}=0 \Rightarrow R_{\beta\gamma}=0$. Связность в касательном расслоении и расслоении диаметров является плоской;

в) $c_{\alpha\beta,\gamma}=0 \Leftrightarrow \nabla a_{\alpha\beta}=0$. В этом случае поле тензора $\{a_{\alpha\beta}\}$ ковариантно постоянно;

г) $c^\alpha_\beta=0 \Rightarrow R^\alpha_{\beta\gamma\delta}=R_{\beta\gamma}=0$. В этом классе все диаметры ℓ переносятся параллельно в смысле аффинного пространства A_n;

д) $c_{\alpha\beta}=0 \Rightarrow R^\alpha_{\beta\gamma\delta}=R_{\beta\gamma}=0$; $c_{\alpha\beta,\gamma}=0$. Гиперповерхность $\widetilde{M}_{n-1}$ является гиперплоскостью, и все параболоиды Q касаются этой гиперплоскости;

е) $c^\beta_\alpha=0$; $c_{\alpha\beta}=0$; $c_{\alpha\beta,\gamma}=0 \Rightarrow R^\alpha_{\beta\gamma\delta}=R_{\beta\gamma}=0$. Конгруэнция M_{n-1} параболоидов Q образуется параллельным перенесением (в смысле объемлющего пространства) параболоида так, что все параболоиды касаются некоторой фиксированной гиперплоскости;

ж) $c_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}$. Конгруэнция состоит из соприкасающихся к гиперповерхности $\widetilde{M}_{n-1}$ параболоидов.

В общем случае для m-мерных Q_m-многообразий M_m с уравнениями

$$\omega^u = 0,\quad \omega^u_\alpha = c^u_{\alpha\beta}\,\omega^\beta,$$

$$\omega^\alpha_u = c^\alpha_{u\beta}\,\omega^\beta,\quad \omega^{u\,'}_{\alpha\beta} = c^u_{\alpha\beta,\gamma}\,\omega^\gamma, \qquad (5)$$

где $\alpha,\beta=\overline{1,m}$; $u,v=\overline{m+1,n}$; $c_{\alpha\beta}=c_{\beta\alpha}$; $c_{\alpha\beta,\gamma}=c_{\beta\alpha,\gamma}$ m-параболоидов: $F^u = a^u_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta - 2x^u = 0$, рассмотренных в [2], возникает аналогичная ситуация. Q_m-многообразие $M_m\subset S^2_m$ проектируется в m-мерные многообразия [2]:

$$\begin{tikzcd}
 & & M^1_m \arrow[dr] & \\
M_m \arrow[r] \arrow[ddd, phantom, "\cap"] & \widetilde{M}^1_m \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddd, phantom, "\cap"] & & \widetilde{M}_m \arrow[ddd, phantom, "\cap"] \\
 & & {}^tM^1_m \arrow[ur] & \\
 & & S^1_m \arrow[dr] & \\
S^2_m \arrow[r] & S^1_m \oplus S^1_{n-m} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A_n \\
 & & S^1_{n-m} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

С локальной точки зрения, эти многообразия можно считать диффеоморфными по отображению проектирования и отождествлять их с $\widetilde{M}_m\subset A_n$. Поэтому $\widetilde{M}_m$ можно рассматривать в качестве базы расслоений:

а) касательного расслоения $T\widetilde{M}_m\subset A_m(S^1_m)$;

б) трансверсального расслоения ${}^tT\widetilde{M}_m\subset A_{n-m}(S^1_{n-m})$;

в) их композиции $({}^tT\oplus T)(\widetilde{M}_m)\subset A_m\oplus A_{n-m}(S^1_m\oplus S^1_{n-m})$

Покажем, что все векторные расслоения наделены связностью в силу одних лишь структурных уравнений (5) многообразия M_m. Действительно, структурные формы $\omega^\alpha, \omega^\alpha_\beta$ расслоения касательных реперов $(A,\bar{e}_\alpha)$ и структурные формы $\omega^\alpha, \omega^n_n$ расслоения трансверсальных реперов $(A,\bar{e}_n)$ удовлетворяют в силу (5) уравнениям

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta\wedge\omega^\alpha_\beta,\quad d\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta\wedge\omega^\alpha_\gamma + R^\alpha_{\beta\gamma\delta}\,\omega^\gamma\wedge\omega^\delta,$$

$$d\omega^u_v = \omega^w_v\wedge\omega^u_w + R^u_{v\alpha\beta}\,\omega^\alpha\wedge\omega^\beta,$$

где

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = c^u_{\beta\gamma}\,c^\alpha_{u\delta},\quad R^u_{v\alpha\beta} = c^\gamma_{v\alpha}\,c^u_{\gamma\beta}.$$

Таким образом, формы $\omega^\alpha, \omega^\alpha_\beta$ [3] являются формами аффинной связности без кручения касательного расслоения $T\widetilde{M}_m$, ω^u_v-формами линейной связности трансверсального расслоения ${}^tT\widetilde{M}_m$ диаметров, а $\omega^\alpha_\beta, \omega^u_v$-формами связности в композиции этих расслоений $({}^tT\oplus T)(\widetilde{M}_m)$, $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$-тензор кривизны первой связности, $R^u_{v\alpha\beta}$-тензор кривизны второй связности, их объединение - тензор кривизны в $({}^tT\oplus T)(\widetilde{M}_m)$. В связи с первым фундаментальным объектом Γ_1 многообразия $\widetilde{M}_m$ и охватываемыми им тензорами кривизны возможна классификация Q_m-многообразий. Отметим некоторые классы:

а) $c^u_{\alpha\beta} = a^u_{\alpha\beta}$. Этот класс состоит из параболоидов Q_m, в некотором смысле соприкасающихся поверхности $\widetilde{M}_m$;

б) $c^u_{\alpha\beta}=0 \Rightarrow R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = R^u_{v\alpha\beta} = 0$ - фокальная поверхность $\widetilde{M}_m$ вырождается в плоскость, и связность в $({}^tT\oplus T)(\widetilde{M}_m)$ плоская;

в) $c^\alpha_{u\beta}=0 \Rightarrow R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = R^u_{v\alpha\beta} = 0$ -трансверсальное расслоение состоит из параллельных в смысле A_n ($n-m$)-плоскостей;

г) $c^u_{\alpha\beta}=0, c^\alpha_{u\beta}=0 \Rightarrow R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = R^u_{v\alpha\beta} = 0$. В пересечении классов б) и в) поверхность $\widetilde{M}_m$ является плоскостью (с параллельным семейством касательных к ней параболоидов, если $c^u_{\alpha\beta\gamma}=0$);

д) пересечение класса а) с б) (или с в)) выделяется тем, что характеристическое многообразие вырождается в цилиндр $F^u = c^u_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha x^\beta = 0$, содержащий диаметр $x^\alpha = 0$;

е) $c^u_{\alpha\beta\gamma}=0 \Leftrightarrow \nabla a^u_{\alpha\beta} = \omega^u_{\alpha\beta} = 0$ -поле тензора ковариантно постоянно.

Библиографический список

1. Митрофанова Е.А. Конгруэнции гиперпараболоидов в n-мерном эквиаффинном пространстве// Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1976. Вып. 7. С. 64-68.

Митрофанова Е.А. Многообразия m-мерных параболоидов// Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат. сб. науч. тр./Калинингр. ун-т. Калининград, 1986. Вып. 17. С. 70-72.

3. Номидзу К. Группы Ли и дифференциальная геометрия. М.: Иностр. лит., 1960.