водит к равенствам: $R^{i}_{\lambda\lambda\mu} = 0 \ (\mu \neq \lambda)$.

Можно доказать утверждение: поверхность $V_p \subset E_n$, несущая почти сопряженную ∇-сеть Фосса, или является ортогональным произведением [4] 2-мерной поверхности V_2 на сопряженную систему V_{p-2}, или расслаивается на 2-мерные поверхности нулевой скалярной кривизны и $(p-2)$-мерные сопряженные системы.

Список литературы

1. Базылев В.Т. Сети на многообразиях.-Тр. геометрич.семинара, т.6, ВИНИТИ АН СССР, 1974, с.189-205.

2. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия, ИЛ, М., 1948.

3. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве.-Лит.матем.сб., 1966, №4, с.475-492.

4. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии, ИЛ, М., 1960.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

Н.В.Амишева

ДВА КЛАССА КОМПЛЕКСА КОНИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассматривается в трехмерном аффинном пространстве комплекс невырожденных коник. Деривационные формулы репера $\{A, e_{\hat\alpha}\}$ в аффинном пространстве имеют вид:

$$dA = \omega^{\hat\alpha} e_{\hat\alpha}, \quad de_{\hat\alpha} = \omega^{\hat\beta}_{\hat\alpha} e_{\hat\beta} \qquad (\hat\alpha, \hat\beta = 1,2,3), \quad (1.1)$$

причем формы Пфаффа $\omega^{\hat\alpha}$, $\omega^{\hat\beta}_{\hat\alpha}$ удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства. Помещая начало репера $\{A, e_{\hat\alpha}\}$ в центр коники Q_2 и направляя векторы так, что e_α компланарны плоскости L_2 коники, а e_3-произвольный вектор пространства, не компланарный с $\{e_\alpha\}$, запишем уравнения коники в виде:

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 1, \quad x^3 = 0, \quad \det\|a_{\alpha\beta}\| \neq 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1,2). \quad (1.2)$$

Исключая из рассмотрения комплексы коник, у которых многообразие центров вырождается, примем $\omega^{\hat\alpha}$ $(\hat\alpha = 1,2,3)$ за независимые формы семейства коник. Тогда система уравнений Пфаффа указанного семейства принимает вид:

$$\Theta_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta}\,\omega^\gamma_\alpha - a_{\alpha\gamma}\,\omega^\gamma_\beta = b_{\alpha\beta\hat\alpha}\,\omega^{\hat\alpha}, \quad (1.3)$$
$$\omega^3_\alpha = \Lambda^3_{\alpha\hat\alpha}\,\omega^{\hat\alpha}.$$

Основные прямые [5] комплекса коник в построенном репере определяются системой уравнений:

$$(\Lambda^3_{\alpha 1}\, a_{\beta 2} - \Lambda^3_{\alpha 2}\, a_{\beta 1})\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^3 = 0. \quad (1.4)$$

В общем случае в плоскости коники имеется две различные основные прямые. Однако, могут иметь место вырожденные случаи: случай сдвоенных основных прямых и случай неопределенных основных прямых. Этим классам коник посвящается настоящая работа.

§2. СЛУЧАЙ СДВОЕННЫХ ОСНОВНЫХ ПРЯМЫХ КОМПЛЕКСА КОНИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Направим вектор e_1 по сдвоенному основному направлению, e_2 -по сопряженному с ним направлению относительно коники. Нормировку вектора e_1 проведем таким образом, что конец его лежит на конике при совмещении начала вектора с центром коники. При такой фиксации векторов выполняются соотношения:

$$a_{11}=1, \quad a_{12}=0, \tag{2.1}$$

$$\Lambda^3_{12}=0, \tag{2.2}$$

$$\Lambda^3_{11}a_{22}-\Lambda^3_{22}=0, \tag{2.3}$$

$$a_{22}\neq 0, \quad \Lambda^3_{21}\neq 0. \tag{2.4}$$

Неравенство $a_{22}\neq 0$ исключает случай вырожденности коники, а неравенство $\Lambda^3_{21}\neq 0$ исключает случай голономности распределения, определенного соответствием: каждой точке пространства соответствует плоскость коники. При такой фиксации формы $\omega^1_1, \omega^2_1, \omega^1_2$ стали главными. Их выражаем через базисные $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ по формулам:

$$\omega^1_1=\Lambda^1_{1\hat{\alpha}}\,\omega^{\hat{\alpha}}, \quad \omega^1_2=\Lambda^1_{2\hat{\alpha}}\,\omega^{\hat{\alpha}}, \quad \omega^2_1=\Lambda^2_{1\hat{\alpha}}\,\omega^{\hat{\alpha}} \tag{2.5}$$

Образующим элементом неголономного многообразия V^{n-1}_n является пара (M_0, μ), где M_0-точка пространства, а μ - инцидентная ей гиперплоскость [3]. С комплексом коник в трехмерном пространстве ассоциируется неголономное V^2_3, элементом которого является (A, L_2), где A -центр коники, L_2 -плоскость коники. В работе [4] неголономное V^2_3 называют неголономной поверхностью.

Т е о р е м а I. Для того, чтобы основная прямая имела асимптотическое направление неголономного многообразия V^2_3, необходимо и достаточно, чтобы аффинная нормаль V^2_3 являлась прямой, сопряженной относительно коники сдвоенной основной прямой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Аффинная нормаль V^2_3 есть касательная к линии, вдоль которой плоскость многообразия $(x^3=0)$ остается параллельной сама себе [4], т.е.к линии:

$$\omega^1:\omega^2:\omega^3=a_{22}\Lambda^3_{11}\Lambda^3_{13}:(\Lambda^3_{13}\Lambda^3_{21}-\Lambda^3_{11}\Lambda^3_{23}):a_{22}(\Lambda^3_{11})^2. \tag{2.6}$$

Асимптотические линии на неголономном многообразии V^2_3 в рассматриваемом классе определяются уравнениями:

$$\omega^3=0, \quad \Lambda^3_{11}(\omega^1)^2+\Lambda^3_{21}\,\omega^1\omega^2+\Lambda^3_{22}(\omega^2)^2=0. \tag{2.7}$$

Если сдвоенная основная прямая с направляющим вектором e_1 имеет асимптотическое направление неголономного многообразия V^2_3, то

$$\Lambda^3_{11}=0. \tag{2.8}$$

Тогда в силу соотношений (2.3) имеет место равенство:

$$\Lambda^3_{22}=0. \tag{2.9}$$

При условии (2.8) уравнения (2.6) принимают вид: $\omega^1=\omega^3=0$. Касательная к этой линии - аффинная нормаль неголономного многообразия V^2_3 - есть прямая AA_2, которая сопряжена относительно коники прямой AA_1 -сдвоенной основной прямой.

Достаточность. Если аффинная нормаль является прямой, сопряженной относительно коники сдвоенной основной прямой, т.е. касательной к линии $\omega^1=\omega^3=0$, то, как видно из (2.6), учитывая неравенство $a_{22}\neq 0$, получим $\Lambda^3_{11}=0$, при котором линия $\omega^2=\omega^3=0$ с касательной AA_1 -асимптотическая линия неголономного многообразия V^2_3.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е I. Так как из равенства (2.8) вытекает (2.9), то уравнения (2.7) принимают вид: $\omega^3=0$, $\omega^1\omega^2=0$, т.е. асимптотические линии на неголономном многообразии V_3^2 координатные. Следовательно, аффинная нормаль, касательная к линии $\omega^1=\omega^3=0$, является в то же время асимптотической линией неголономного многообразия V_3^2.

З а м е ч а н и е 2. Из уравнений (2.6) и неравенства $a_{22}\neq 0$ заключаем, что аффинная нормаль неголономного многообразия V_3^2 может лежать в плоскости коники тогда и только тогда, когда $\Lambda_{11}^3=0$. Но если обращается в нуль Λ_{11}^3, то уравнения (2.6) принимают вид $\omega^1=\omega^3=0$, откуда следует, что в плоскости коники аффинной нормалью может быть только прямая, сопряженная относительно коники сдвоенному диаметру. Соответствие, устанавливаемое между точками пространства и плоскостями коник, инцидентными точкам, задает в пространстве распределение Δ_2. Существуют интегральные кривые распределения Δ_2, вдоль которых коника и смежная к ней пересекаются. Точки пересечения назовем фокусами коники вдоль распределения Δ_2. Заметим, что в работах [1] и [2] эти точки называются фокусами неголономной конгруэнции коник.

Т е о р е м а 2. Если сдвоенная основная прямая имеет асимптотическое направление неголономного многообразия V_3^2, то сдвоенная основная точка A_1 является фокусом коники вдоль распределения Δ_2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнения, определяющие фокусы коники вдоль Δ_2, имеют вид:

$$x^3=0,\quad (x^1)^2+a_{22}(x^2)^2=1,$$

$$\{b_{221}(x^2)^2-2\Lambda_{11}^1(x^1)^2-2(\Lambda_{21}^1+a_{22}\Lambda_{11}^2)x^1x^2-2x^1\}\Lambda_{22}^3x^2-$$
$$-\{b_{222}(x^2)^2-2\Lambda_{22}^1(x^1)^2-2a_{22}x^2-2(\Lambda_{22}^1+a_{22}\Lambda_{12}^2)\}(\Lambda_{11}^3x^1+\Lambda_{21}^3x^2)=0. \tag{2.10}$$

Если сдвоенная основная прямая имеет асимптотическое направление неголономного многообразия V_3^2, то выполняются соотношения (2.8), (2.9), при которых, как видно из системы (2.10), точка A_1 (1,0,0) является фркусом коники вдоль распределения Δ_2. Теорема доказана.

Легко заметить, что в этом случае касательной плоскостью многообразия V_3^2 является плоскость коники.

Напомним, что конус Малюса [4] для асимптотического направления данного элемента многообразия есть геометрическое место касательных к линиям, при движении вдоль которых асимптотическая касательная описывает торс.

Т е о р е м а 3. Если сдвоенная основная прямая имеет асимптотическое направление неголономного многообразия V_3^2, то конус Малюса для этого направления распадается на пару плоскостей, одна из которых является плоскостью коники.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сдвоенная основная прямая имеет асимптотическое направление неголономного многообразия V_3^2, если выполняются условия (2.2), (2.8) и (2.9). При этих условиях конус Малюса для направления e_1, которое является сдвоенным основным направлением и асимптотическим направлением неголономного многообразия V_3^2, определяется уравнением $x^3(\Lambda_{11}^2x^1+\Lambda_{12}^2x^2+\Lambda_{13}^2x^3-\Lambda_{13}^3x^2)=0$, откуда непосредственно вытекает утверждение теоремы.

§3. СЛУЧАЙ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ОСНОВНЫХ ПРЯМЫХ КОМПЛЕКСА КОНИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Основные диаметры коники связаны с характеристикой плоскости $x^3=0$ вдоль распределения Δ_2.

Т е о р е м а 4. Если основные прямые не определены, то характеристикой плоскости коники вдоль распределения Δ_2 является либо точка, либо вся плоскость.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть основные диаметры коники не определены. Тогда выполняются соотношения:

$$a_{11}\Lambda_{12}^3=\Lambda_{11}^3a_{12}, \tag{3.1}$$

$$a_{22}\Lambda^3_{21}=\Lambda^3_{22}a_{21}, \qquad (3.2)$$

$$a_{12}\Lambda^3_{21}+a_{22}\Lambda^3_{11}-a_{11}\Lambda^3_{22}-a_{21}\Lambda^3_{12}=0. \qquad (3.3)$$

Характеристика плоскости коники $x^3=0$ вдоль распределения Δ_2 при условиях (3.1)-(3.3) находится из системы:

$$x^3=0,\quad a_{11}\Lambda^3_{22}x^1-a_{12}\Lambda^3_{22}x^2=0, \qquad (3.4)$$
$$a_{12}\Lambda^3_{22}x^1-a_{22}\Lambda^3_{22}x^2=0,$$

определитель которой равен

$$(\Lambda^3_{22})^2(a_{11}a_{22}-a^2_{12}). \qquad (3.5)$$

Если выражение (3.5) не равно нулю, то ранг системы (3.4) равен трем, и характеристикой плоскости $x^3=0$ вдоль Δ_2 является точка - центр коники. Если выражение (3.5) равно нулю, то, так как коника невырождена и $a_{11}a_{22}-a^2_{12}\neq 0$, обращается в нуль величина Λ^3_{22}. Обращение в нуль величины Λ^3_{22} приводит, как видно из (3.4), к тому, что характеристика плоскости $x^3=0$ вдоль Δ_2 определяется одним уравнением $x^3=0$. Следовательно, плоскость коники вдоль Δ_2 в этом случае неподвижна. Теорема доказана.

Т е о р е м а 5. Для того, чтобы основные прямые были неопределены, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1/ уравнение $\omega^3=0$ вполне интегрируемо; 2/ асимптотические направления коники совпадают с асимптотическими направлениями голономной поверхности центров $\omega^3=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если основные прямые не определены, то из (3.1)-(3.3) вытекают соотношения:

$$\frac{a_{11}}{\Lambda^3_{11}}=\frac{a_{12}}{\Lambda^3_{12}}=\frac{a_{21}}{\Lambda^3_{21}}=\frac{a_{22}}{\Lambda^3_{22}}. \qquad (3.6)$$

Отсюда следует: 1/ $\Lambda^3_{12}=\Lambda^3_{21}$, что дает вполне интегрируемость уравнения $\omega^3=0$; 2/ пропорциональность квадратичных форм коники $(a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta)$ и поверхности центров $(\Lambda^3_{\alpha\beta}\omega^\alpha\omega^\beta)$. Наоборот, условия 1/ и 2/ теоремы дают соотношения (3.6), которые означают неопределенность основных прямых. Теорема доказана.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. Комплексы кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Геом.сб., в.4, Тр.Томского ун-та, 176, 1964, с.28-36.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геом.сб., в.3, Тр.Томского ун-та, 168, с.28-42.

3. Р о г о в о й М.Р. О сопряженных направлениях на неголономном многообразии V^{n-1}_n в P_n. Украинский геом.сб., в.10, Изд-во Харьковского ун-та, 1971.

4. Щ е р б а к о в Р.Н., Р а х у л а М.О. К эквиаффинной теории неголономного многообразия. Геом.сб., в.1, Тр.Томского ун-та, 160, 1962.

5. А м и ш е в а Н.В. Комплексы центральных кривых второго порядка в трехмерном эквиаффинном пространстве. Геом.сб., в.9, Изд-во Томского ун-та, 202, 1972.