УДК 532.591

† *А. А. Зайцев, А. И. Руденко, С. М. Алексеева*

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ВОЛН В ДВУСЛОЙНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ПО ПЛОТНОСТИ ЖИДКОСТИ

Поступила в редакцию 18.06.2021 г.
Рецензия от 04.07.2021 г.

В работе представлена корректировка новой методики решения задачи о синусоидальных волнах на поверхности однородной идеальной жидкости, связанная с уточнением граничных условий. Найдено дисперсионное соотношение для длинных волн. Получено значение частоты для синусоидальных волн в стратифицированной жидкости.

The paper presents the correction of a new technique for solving the problem of sinusoidal waves on the surface of a homogeneous ideal fluid, associated with the refinement of the boundary conditions. The dispersion relation for long waves is found. The frequency value for sinusoidal waves in a stratified fluid is obtained.

Ключевые слова: двуслойная жидкость, синусоидальная волна, дисперсионное соотношение, фазовая скорость, приближение Буссинеска

Keywords: two-layer liquid, sine wave, dispersion relation, phase velocity, Boussinesq approximation

Введение

Наше исследование посвящено задаче по распространению синусоидальных волн в стратифицированной двуслойной жидкости. Заметим, что задача была рассмотрена, например, в классической монографии [1].

Так, ранее нами в работе [2] была приведена новая методика решения задачи о синусоидальных волнах на поверхности однородной идеальной жидкости, в основу которой был положен отличный от классического подход, связанный с потенциалом скорости [1]. Однако в [2] не были теоретически обоснованы граничные условия, поэтому в разделе I данной статьи выполнена корректировка методики, основанной на использовании характеристик волнового движения, и теоретически обоснованы граничные условия на свободной поверхности и на линии раздела стратифицированных слоев. Заметим, что в [3] не получено полное выражение для частоты синусоидальных волн, поэтому в разделе II на основе выделенных граничных условий выполнен детальный анализ синусоидальных волн в двуслойной стратифицированной жидкости.

I. Корректировка новой методики решения задачи о синусоидальных волнах на поверхности жидкости

Введем обозначения для встречающихся в статье величин. Пусть $\eta(x)$ — профиль свободной поверхности:

$$\eta(x) = a\,e^{i(\omega t - kx)}, \tag{1.1}$$

где a — амплитуда волны; $\omega t - kx$ — фаза волны; ω — частота; k — волновое число.

Отметим, что физический смысл формулы (1.1) сводится к тому, что среднее значение профиля синусоидальной волны равно нулю, осреднение проводится по периоду волны, при появлении волнения элементарные объемы жидкости выше и ниже горизонтального уровня одинаковы:

$$\eta(x) = 0. \tag{1.2}$$

Составляющие для скорости u, v — горизонтальная и вертикальная компоненты скорости элементарного объема жидкости.

В ходе рассмотрения возникают две неопределенности.

Первая связана с неоднозначностью горизонтальной компоненты скорости: для любого постоянного значения u_0 характерно преобразование

$$u \to u + u_0. \tag{1.3}$$

Фактически (1.3) есть дрейф волны. Отсутствие дрейфа волны осуществляется благодаря (1.2).

Вторая неопределенность — завихренность волновых движений, поэтому в статье считаем движение потенциальным.

Полное давление представляет собой сумму статического давления, зависящего от глубины жидкости (вертикальной координаты), и динамического:

$$p = p_s + p_d. \tag{1.4}$$

Постановка задачи о синусоидальных волнах в однородной жидкости

Определить u, v, p, которые в слое $-h < y < 0$ удовлетворяют уравнениям

$$\rho u_t + p_x = 0,\ \rho v_t + p_y + \rho g = 0,\ u_x + v_y = 0,\ u_y - v_x = 0, \tag{1.5}$$

граничным условиям на дне

$$v = 0 \text{ при } y = -h \tag{1.6}$$

и на свободной поверхности

$$v = \eta_t = ia\omega e^{i(\omega t - kx)} \quad при \ y = 0, \tag{1.7}$$

$$p = 0 \ при \ y = \eta, \tag{1.8}$$

условиям периодичности

$$u\left(x + \frac{2\pi}{k}, y\right) = u(x, y),\ v\left(x + \frac{2\pi}{k}, y\right) = v(x, y),$$

$$p\left(x + \frac{2\pi}{k}, y\right) = p(x, y), \tag{1.9}$$

условиям отсутствия дрейфа

$$u(x, y) = 0. \tag{1.10}$$

На первом этапе упростим (1.5) с учетом (1.6-1.10), используя специальное представление для характеристик волнового движения, основанное на (1.1) для профиля синусоидальной волны.

Решение (1.5) следует искать с учетом (1.1) и (1.8) в следующем виде:

$$u = u_r(y) e^{i(\omega t - kx)},$$

$$v = v_r(y) e^{i(\omega t - kx)},$$

$$p = p_r(y) e^{i(\omega t - kx)}. \tag{1.11}$$

Индекс r указывает, что значения компонент скорости и давления выбраны в отдельном слое жидкости. Раздел жидкости обоснован стратификацией по плотности.

Тогда с учетом последнего выражения в (1.11) формула (1.4) примет вид

$$p = p_s(y) + p_r(y) e^{i(\omega t - kx)}. \tag{1.12}$$

Принимая во внимание (1.5), с учетом первых двух уравнений (1.11) получим

$$-iku_r(y) + v_r'(y) = 0, \qquad u_r'(y) + ikv_r(y) = 0. \tag{1.13}$$

На втором этапе, решая совместно (1.13), получим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $v_r(y)$:

$$v_r''(y) - k^2 v_r(y) = 0. \tag{1.14}$$

Общее решение (1.14) будет следующим:

$$v_r(y) = A\,sh\big(k(y + h)\big) + B\,ch\big(k(y + h)\big), \tag{1.15}$$

где A, B — произвольные вещественные константы.

Для их определения используем граничные условия:

$$v_r\left(y=0\right)=i\omega a,\ v_r\left(y=-h\right)=0.$$

Тогда установим, что $A=\dfrac{i\omega a}{sh\left(kh\right)},\ B=0.$

С учетом констант (1.15) примет вид

$$v_r\left(y\right)=\frac{i\omega a}{sh\left(kh\right)}sh\left(k\left(y+h\right)\right). \tag{1.16}$$

С учетом (1.16) первое уравнение (1.13) для функции $u_r\left(y\right)$

$$u_r\left(y\right)=\frac{\omega a}{sh\left(kh\right)}ch\left(k\left(y+h\right)\right). \tag{1.17}$$

Используя $\omega^2=gk\,th\left(kh\right)$ для функций $u_r\left(y\right)$ (1.16) и $v_r\left(y\right)$ (1.17), запишем, что

$$u_r\left(y\right)=a\sqrt{\frac{2gk}{sh\left(2kh\right)}}ch\left(k\left(y+h\right)\right),$$

$$v_r\left(y\right)=ia\sqrt{\frac{2gk}{sh\left(2kh\right)}}sh\left(k\left(y+h\right)\right). \tag{1.18}$$

Далее рассмотрим первое уравнение системы (1.5), которое затем преобразуем с учетом первых уравнений (1.11) и (1.12), а также используем дисперсионное соотношение $\omega^2=gk\,th\left(kh\right)$. В результате получим, что выражение для функции $p_r\left(y\right)$ имеет вид

$$p_r\left(y\right)=\rho ga\frac{ch\left(k\left(y+h\right)\right)}{ch\left(kh\right)}. \tag{1.19}$$

Третий этап посвящен утверждению о существовании и единственности решения краевой задачи для функций $u_r\left(y\right)$ и $v_r\left(y\right)$, постановка которой дана в начале данного пункта.

Утверждение. *Для компонент скорости $u_r\left(y\right)$, $v_r\left(y\right)$, которые удовлетворяют нормальной системе дифференциальных уравнений*

$$-iku_r\left(y\right)+v_r^{'}\left(y\right)=0,\qquad u_r^{'}\left(y\right)+ikv_r\left(y\right)=0,$$

а также граничным условиям

$$u_r\left(0\right)=\varepsilon\frac{gk}{\omega}a,\ v_r\left(0\right)=i\omega a,\quad v_r\left(-h\right)=0,$$

существует зависимость $\omega=\sqrt{gk\,th\left(kh\right)}.$

Решение краевой задачи для функций $u_r(y)$ и $v_r(y)$ дается формулами (1.17), (1.18):

$$u_r(y)=\frac{\omega a}{sh(kh)}ch(k(y+h))=a\sqrt{\frac{2gk}{sh(2kh)}}ch(k(y+h)),$$

$$v_r(y)=\frac{i\omega a}{sh(kh)}sh(k(y+h))=ia\sqrt{\frac{2gk}{sh(2kh)}}sh(k(y+h)).$$

Для $p_r(y)$ дается формулой (1.19):

$$p_r(y)=\rho ga\frac{ch(k(y+h))}{ch(kh)}.$$

Исходя из приведенного утверждения можно выделить следующие замечания применительно к длинноволновому приближению.

Замечание 1. $\omega=c_0k$, $c_0=\sqrt{gh}$ *– фазовая скорость.*

Замечание 2. Выражения для гидродинамических характеристик:

$$u_r=a\sqrt{\frac{g}{h}},\ v_r=i\sqrt{\frac{g}{h}}ak(y+h),\ p_r=\rho ga.$$

Замечание 3. $u_r(y)=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{-h}^{0}u_r(y)dy=a\sqrt{\frac{g}{h}}$.

II. Синусоидальные волны в двуслойной жидкости

Рассмотрим решение задачи о колебаниях синусоидальных волн в стандартной постановке для случая двухслойной жидкости и произвольных длин волн. Отметим, что движение жидкости является потенциальным.

Физическая постановка задачи. *Полное давление в каждом слое является суммой статической и динамической составляющих:*

$$p_n=p_{sn}(y)+p_{nd}(y),\ n=1,2.$$

Пусть d_1, d_2 *— толщины слоев (* $H=d_1+d_2$ *);* ρ_1, ρ_2 *плотности первого и второго слоя соответственно, причем* $\rho_1<\rho_2$.

Тогда (1.5) для соответствующих слоев будет иметь вид

$$\rho_1u_{1,t}+p_{1,x}=0,\ \rho_1v_{1,t}+p_{1,y}+\rho_1g=0,$$

$$u_{1,x}+v_{1,y}=0,\ u_{1,y}-v_{1,x}=0,$$

$$\rho_2u_{2,t}+p_{2,x}=0,\ \rho_2v_{2,t}+p_{2,y}+\rho_2g=0,$$

$$u_{2,x}+v_{2,y}=0,\quad u_{2,y}-v_{2,x}=0,$$

$$-d_1+\eta_2<y<\eta_1,\ -H<y<\eta_1<-d_1+\eta_2.$$

Дополнительно запишем условия периодичности (1.9) применительно к слоям:

$$\eta_1\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)=\eta_1(x),\ u_1\left(x+\frac{2\pi}{k},y\right)=u_1(x,y),$$

$$v_1\left(x+\frac{2\pi}{k},y\right)=v_1(x,y),\ p_1\left(x+\frac{2\pi}{k},y\right)=p_1(x,y),$$

$$\eta_2\left(x+\frac{2\pi}{k}\right)=\eta_2(x),\ u_2\left(x+\frac{2\pi}{k},y\right)=u_2(x,y),$$

$$v_2\left(x+\frac{2\pi}{k},y\right)=v_2(x,y),\ p_2\left(x+\frac{2\pi}{k},y\right)=p_2(x,y).$$

Также запишем условия отсутствия дрейфа в каждом из двух слоев (1.10):

$$u_1(x,y)=0,\ u_2(x,y)=0.$$

Рассмотрим граничные условия применительно для каждого слоя жидкости.

На свободной поверхности: $v_1(y=\eta_t)=\eta_{1,t}$, $p_1(y=\eta_t)=0.$ *Условием на дне служит условие непротекания:* $v_2(y=-H)=0.$

Для кинематических условий должно выполняться требование

$$v_1(y=-d_1+\eta_2)=v_2(y=-d_1+\eta_2),\quad v_1(y=-d_1+\eta_2)=+\eta_{2,t}.$$

Динамическое условие состоит в требовании непрерывности полного давления:

$$p_1(y=-d_1+\eta_2)=p_2(y=-d_1+\eta_2).$$

На первом этапе рассмотрим выражения для профиля и динамических характеристик синусоидальной волны и полного давления.

$$\eta_1(x)=a_1e^{i(\omega t-kx)},\ \eta_2(x)=a_2e^{i(\omega t-kx)},\ a_1,a_2\neq 0. \tag{2.1}$$

$$u_1=u_{r1}(y)e^{i(\omega t-kx)},\ v_1=v_{r1}(y)e^{i(\omega t-kx)},$$

$$-d_1+\eta_2<y<\eta_1, \tag{2.2}$$

$$u_2=u_{r2}(y)e^{i(\omega t-kx)},\ v_2=v_{r2}(y)e^{i(\omega t-kx)},$$

$$-H<y<-d_1+\eta_2, \tag{2.3}$$

$$p_1=p_{s1}(y)+p_{r1}(y)e^{i(\omega t-kx)},\quad -d_1+\eta_2<y<\eta_1, \tag{2.4}$$

$$p_2 = p_{s2}(y) + p_{r2}(y)e^{i(\omega t - kx)},$$

$$-H < y < -d_1 + \eta_2, \qquad (2.5)$$

В (2.4), (2.5) статические составляющие полного давления по слоям имеют вид

$$p_{s1}(y) = -\rho_1 g y, \quad -d_1 < y < 0,$$

$$p_{s2}(y) = -\rho_2 g y + (\rho_1 - \rho_2) g d_1, \ -H < y < -d_1.$$

Важным следствием является тот факт, что выражения для полных давлений относительно отдельного слоя будут иметь вид

$$p_1 = p_{r1}(y)e^{i(\omega t - kx)} - \rho_1 g y, \ -d_1 + \eta_2 < y < \eta_1,$$

$$p_2 = p_{r2}(y)e^{i(\omega t - kx)} - \rho_2 g y + (\rho_1 - \rho_2) g d_1, \ -H < y < -d_1 + \eta_2.$$

Далее формулы (2.1)—(2.5) переносим в общую постановку задачи данного пункта и после необходимых упрощений получаем соответственно постановку задачи о синусоидальных волнах в двухслойной жидкости с учетом граничных условий.

Задача о синусоидальных волнах в двуслойной жидкости. *Найти функции* u_1, v_1, $p_{r1}(y)$ *на промежутке* $-d_1 < y < 0$, *а также функции* u_2, v_2, $p_{r2}(y)$ *на промежутке* $-H < y < -d_1$, *которые удовлетворяют системам уравнений*

$$\rho_1 \omega u_{r1}(y) - k p_{r1}(y) = 0, \quad i\rho_1 \omega v_{r1}(y) + k p'_{r1}(y) = 0,$$

$$k u_{r1}(y) + i v'_{r1}(y) = 0, \quad u'_{r1}(y) + ik v_{r1}(y) = 0,$$

$$-d_1 < y < 0;$$

$$\rho_2 \omega u_{r2}(y) - k p_{r2}(y) = 0, \quad i\rho_2 \omega v_{r2}(y) + k p'_{r2}(y) = 0,$$

$$k u_{r2}(y) + i v'_{r2}(y) = 0, \quad u'_{r2}(y) + ik v_{r2}(y) = 0,$$

$$-H < y < -d_1,$$

а также граничным условиям

$$v_{r1}(y=0) = i\omega a_1, v_{r1}(y=-d_1) = i\omega a_2, \ v_{r2}(y=-d_1) = i\omega a_2,$$

$$v_{r2}(y=-H) = 0,$$

$$p_{r1}(y=0) = g\rho_1 a_1, \ p_{r1}(y=-d_1) - p_{r2}(y=-d_1) = g(\rho_1 - \rho_2) a_2.$$

Приведем общие решения задачи о синусоидальных волнах в двуслойной жидкости для верхнего и нижнего слоев жидкости. Применительно к верхнему слою можно записать

$$u_{r1}(y) = -iA_1\, sh(ky) - iB_1\, ch(ky),$$

$$v_{r1}(y) = B_1\, sh(ky) + A_1\, ch(ky),$$

$$p_{r1}(y) = -\rho_1 \frac{i\omega}{k} A_1\, sh(ky) - \rho_1 \frac{i\omega}{k} B_1\, ch(ky), \quad -d_1 < y < 0.$$

В случае нижнего слоя

$$u_{r2}(y) = -iD_1\, sh(k(y+H)),$$

$$v_{r2}(y) = D_1\, sh(k(y+H)),$$

$$p_{r2}(y) = -\rho_2 \frac{i\omega}{k} D_1\, ch(k(y+H)),$$

$$-H < y < -d_1.$$

Коэффициенты A_1, B_1 найдем из граничных условий на свободной поверхности

$$(\left(v_{r1}(y=0) = i\omega a_1,\, p_{r1}(y=0) = g\rho_1 a_1\right):$$

$$A_1 = i\omega a_1, \quad B_1 = -\frac{kga_1}{i\omega}.$$

С учетом данных коэффициентов решения для верхнего слоя будут иметь вид

$$u_{r1}(y) = \omega a_1\, sh(ky) + \frac{kga_1}{\omega} ch(ky),$$

$$v_{r1}(y) = -\frac{kga_1}{i\omega} sh(ky) + i\omega a_1\, ch(ky),$$

$$p_{r1}(y) = \rho_1 \frac{\omega^2}{k} a_1\, sh(ky) + \rho_1 g a_1\, ch(ky), \quad -d_1 < y < 0.$$

Для $y = -d_1$ определим $u_{r1}(y)$, $v_{r1}(y)$, $p_{r1}(y)$:

$$u_{r1}(y=-d_1) = -\frac{a_1}{\omega}\left(\omega^2\, sh(kd_1) - kg\, ch(kd_1)\right),$$

$$v_{r1}(y=-d_1) = -\frac{a_1}{i\omega}\left(\omega^2\, ch(kd_1) - kg\, sh(kd_1)\right),$$

$$p_{r1}(y=-d_1) = -\frac{\rho_1 a_1}{k}\left(\omega^2\, sh(kd_1) - kg\, ch(kd_1)\right).$$

Для нижнего слоя можно записать $u_{r2}(y)$, $v_{r2}(y)$, $p_{r2}(y)$:

$$u_{r2}(y=-d_1)=iD_1\,sh(kd_2),$$

$$v_{r2}(y=-d_1)=D_1\,sh(kd_2),$$

$$p_{r2}(y=-d_1)=-\rho_2\frac{i\omega}{k}D_1\,ch(kd_2),$$

D_1 — вспомогательный параметр.

Тогда, учитывая граничные условия применительно к первому слою

$$v_{r1}(y=-d_1)=i\omega a_2=-\frac{a_1}{i\omega}\left(\omega^2\,ch(kd_1)-kg\,sh(kd_1)\right),$$

получаем, что

$$\left(\omega^2\,ch(kd_1)-kg\,sh(kd_1)\right)a_1-\omega^2 a_2=0.$$

Аналогично поступая $\left(v_{r2}(y=-d_1)=i\omega a_2=D_1\,sh(kd_2)\right)$, запишем:

$$i\omega a_2-sh(kd_2)D_1=0.$$

Ориентируясь на последнее граничное условие $(p_{r1}(y=-d_1)-$ $-\,p_{r2}(y=-d_1)=g(\rho_1-\rho_2)a_2)$, также можно записать

$$\rho_1\left(\omega^2\,sh(kd_1)-kg\,ch(kd_1)\right)a_1+gk(\rho_1-\rho_2)a_2-\rho_2 i\,\omega ch(kd_2)D_1=0.$$

Полученную систему уравнений

$$\left(\omega^2\,ch(kd_1)-kg\,sh(kd_1)\right)a_1-\omega^2 a_2+0D_1=0,$$

$$0a_1+i\omega a_2-sh(kd_2)D_1=0,$$

$$\rho_1\left(\omega^2\,sh(kd_1)-kg\,ch(kd_1)\right)a_1+gk(\rho_1-\rho_2)a_2-\rho_2 i\,\omega ch(kd_2)D_1=0$$

перепишем в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \omega^2\,ch(kd_1)-kg\,sh(kd_1) & -\omega^2 & 0 \\ 0 & i\omega & -sh(kd_2) \\ \rho_1\left(\omega^2\,sh(kd_1)-kg\,ch(kd_1)\right) & gk(\rho_1-\rho_2) & -\rho_2 i\,\omega ch(kd_2) \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ D_1 \end{pmatrix}=0.$$

Введем обозначения:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} \omega^2 ch(kd_1)-kg\,sh(kd_1) & -\omega^2 & 0 \\ 0 & i\omega & -sh(kd_2) \\ \rho_1\left(\omega^2 sh(kd_1)-kg\,ch(kd_1)\right) & gk(\rho_1-\rho_2) & -\rho_2 i\,\omega ch(kd_2) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{X}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ D_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем, что

$$\tilde{A}\tilde{X}=0. \tag{2.6}$$

Нетривиальное решение (2.6) есть равенство нулю определителя матрицы $|\tilde{A}|=0$. $|\tilde{A}|$ относительно ω представляет собой характеристический многочлен.

Выражение для характеристического многочлена:

$$\left(\rho_1 sh(kd_1)sh(kd_2)+\rho_2 ch(kd_1)ch(kd_2)\right)\omega^4+$$

$$+gk((\rho_1-\rho_2)sh(kd_2)ch(kd_1)-\rho_2 sh(kd_1)ch(kd_2)-\rho_1 sh(kd_2)ch(kd_1))\omega^2-$$

$$-(\rho_1-\rho_2)(gk)^2 sh(kd_1)sh(kd_2)=0. \tag{2.7}$$

Очевидно, что (2.7) представляет собой биквадратное уравнение относительно ω.

Запишем приближения Буссинеска:

$$\rho_1=\rho-\frac{\Delta\rho}{2},\ \rho_2=\rho-\frac{\Delta\rho}{2},\ \Delta\rho<<\rho. \tag{2.8}$$

С учетом (2.8) формулу (2.7) можно переписать:

$$\left(\rho ch(kH)+\frac{\Delta\rho}{2}ch(k(d_1-d_2))\right)\omega^4-gk\left(\rho+\frac{\Delta\rho}{2}\right)sh(kH)\omega^2+$$

$$+(gk)^2\Delta\rho\,sh(kd_1)sh(kd_2)=0. \tag{2.9}$$

При $\Delta\rho=0$ из формулы (2.9) можно получить, что $\omega=\sqrt{gk\,th(kH)}$.

Для длинноволновой области $(\omega^4<<\omega^2)$ на основании (2.9) можно получить

$$\omega=\sqrt{\frac{(gk)sh(kd_1)sh(kd_2)\Delta\rho}{sh(kH)\left(\rho+\frac{\Delta\rho}{2}\right)}}\ \text{ или }\ \omega=k\sqrt{\frac{g\,d_1 d_2\Delta\rho}{H\left(\rho+\frac{\Delta\rho}{2}\right)}}.$$

Учитывая, что $\omega = c_0 k$, значение фазовой скорости таково:

$$c_0^2 = \frac{g\, d_1 d_2 \Delta\rho}{H\left(\rho + \dfrac{\Delta\rho}{2}\right)} = \frac{g\, d_1 d_2}{H} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}.$$

Результат решения биквадратного уравнения (2.9) относительно ω^2 имеет довольно громоздкий вид. Приведем его:

$$\omega^2 = \frac{2^{-1} gk}{\rho ch(kH) + \dfrac{\Delta\rho}{2} ch\left(k(d_1 - d_2)\right)} \times$$

$$\times \left\{ \rho_2 sh(kH) + \sqrt{\rho_1^2 ch^2(kH) + 2\Delta\rho\rho_1 ch(kH) ch\left(k(d_1 - d_2)\right) + (\Delta\rho)^2 ch^2\left(k(d_1 - d_2)\right) - \rho_2^2} \right\}.$$

При $\Delta\rho = 0$ последняя формула также дает известное дисперсионное соотношение $\omega = \sqrt{gk\, th(kH)}$.

Заключение

Проведенная корректировка новой методики позволяет уточнить граничные условия не только на свободной поверхности идеальной однородной стратифицированной жидкости, но и на линии раздела двух стратифицированных по плотности слоев. Правильность методики подтверждается тем фактом, что полученное дисперсионное соотношение полностью совпадает с ранее полученным в литературе результатом. Показано, что фазовые скорости длинных поверхностных и внутренних волн от волнового числа не зависят, то есть эти волны не обладают дисперсией.

Список литературы

1. *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений. М., 1977.
2. *Зайцев А.А., Кулаков П.А.* Новый метод решения задачи о синусоидальных волнах на поверхности однородной идеальной жидкости // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. №4. С. 48—55.
3. *Зайцев А.А., Кулаков П.А.* Анализ синусоидальных волн в двуслойной жидкости // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. №4. С. 32—43.

Об авторах

Анатолий Алексеевич Зайцев — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота, Россия.
E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Алексей Иванович Руденко — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота, Россия.
E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Светлана Михайловна Алексеева — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийская государственная академия рыбопромыслового флота, Россия.

E-mail: alekseeva-sm@mail.ru

The authors

Dr Anatoly A. Zaitsev, Associate Professor, Baltic Fishing Fleet State Academy, Russia.

E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Dr Alexey I. Rudenko, Associate Professor, Baltic Fishing Fleet State Academy, Russia.

E-mail: alex-rudenko@bk.ru

Dr Svetlana M. Alekseeva, Associate Professor, Baltic Fishing Fleet State Academy, Russia.

E-mail: alekseeva-sm@mail.ru