S.I. Aleshnikov

ABOUT RESIDUES OF WEIL DIFFERENTIALS IN A CONSTANT FIELD EXTENSION OF AN ALGEBRAIC CURVE

In this work we consider the relation between the residues of a Weil differential ω on a non-singular projective algebraic curve C over a perfect constant field. Let P is a plase of curve C of degree n, F_P is the residue class field, which is a finite Galois extension of constant field K, $F = K(C)$ is the field of rational functions on C, $F' = F\cdot F_P$ is the constant field extension of field F by means of F_P. Then in F' there exist exactly n places $Q_1, ..., Q_n$ lying over P. The degree of Q_i is one, for any i: $1 \le i \le n$. Moreover $\mathrm{Res}_P(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{Q_i}(\omega)$, and a local component ω_P of the Weil differential ω in P can be viewed as $\omega_P(u) = \mathrm{Res}_P(u\cdot\omega)$ for any $u \in F$, that gives a simple proof of the Residue Theorem.

УДК 512.7

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДЛЯ ОДНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКИ ХОРОШЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КРИВЫХ

И.С.А л е ш н и к о в

(Университет Эссена)

В настоящей работе дается новое, более простое, доказательство того, что последовательность $X=(X_1, X_2, X_3, ...)$ проективных, неприводимых, невырожденных алгебраических кривых над полем $\mathbb{F}_{q^2}$, определяемых уравнениями: $x_{i+1}^{q} + x_{i+1}\cdot\frac{1}{x_i^{q-1}} = x_i$ для любого $i = \overline{1, n-1}$, является асимптотически хорошей.

Определение. Пусть $C=(C_1, C_2, C_3, ...)$ - последовательность проективных, неприводимых, невырожденных алгебраических кривых над полем $\mathbb{F}_s$, $N(C_i)$ - число рациональных точек, а $g(C_i)$ - род кривой C_i. Положим $\lambda(C)=\lim\limits_{i\to\infty}\frac{N(C_i)}{g(C_i)}$. Последовательность C называется асимптотически хорошей (соотв. асимптотически плохой), если $\lambda(C)>0$ (соотв. $\lambda(C)=0$).

Основным результатом является следующая

Теорема. Пусть $F_n=\mathbb{F}_{q^2}(x_1, \ldots, x_n)$ ($\forall$ n≥1) - поле рациональных функций кривой X_n, тогда башня полей $\mathcal{F}=(F_1, F_2, F_3, \ldots)$ достигает границы Дринфельда-Владуца над полем $\mathbb{F}_{q^2}$, т.е. $\lambda(\mathcal{F})=\lim\limits_{i\to\infty}\dfrac{N(F_i)}{g(F_i)}=q-1$.

Лемма 1. Пусть функциональное поле $F=\mathbb{F}_{q^2}(y, z)$ задается при помощи уравнения $z^q+z\cdot\dfrac{1}{y^{q-1}}=y$, тогда:

1) расширение $F/\mathbb{F}_{q^2}(y)$ является расширением Галуа и

$$[F:\mathbb{F}_{q^2}(y)]=[F:\mathbb{F}_{q^2}(z)]=q;$$

2) функция y имеет единственный полюс P_∞ в F; эта точка полностью разветвлена в $F/\mathbb{F}_{q^2}(y)$ и является общим полюсом y и z в F;

3) функция z имеет единственный нуль Q_0 в F; эта точка полностью разветвлена в $F/\mathbb{F}_{q^2}(z)$ и является общим нулем y и z в F;

4) нуль функции y в $\mathbb{F}_{q^2}(y)$ (соотв. полюс функции z в $\mathbb{F}_{q^2}(z)$) полностью разлагается в $F/\mathbb{F}_{q^2}(y)$ (соотв. в $F/\mathbb{F}_{q^2}(z)$); если точки $Q_0, R_1, \ldots, R_{q-1}$ - нули функции y в F, то главные дивизоры y и z в F имеют вид:

$$(y) = Q_0 + R_1+\ldots+R_{q-1} - qP_\infty,\ (z) = qQ_0 - R_1-\ldots-R_{q-1} - P_\infty;$$

5) точка P_∞ является единственной точкой F, разветвленной над $\mathbb{F}_{q^2}(y)$; ее дифферентная экспонента в расширении $F/\mathbb{F}_{q^2}(y)$ равна $d(P_\infty)=q^2+q-2$;

6) точка Q_0 является единственной точкой F, разветвленной над $\mathbb{F}_{q^2}(z)$; ее дифферентная экспонента в расширении $F/\mathbb{F}_{q^2}(z)$ равна $d(P_\infty)=q^2+q-2$.

Доказательство получается при помощи предложений III.1.14, III.5.10, III.5.12 и теоремы III.5.1 [1].

Лемма 2. Для башни функциональных полей $\mathcal{F}=(F_1, F_2, F_3, \ldots)$ над $\mathbb{F}_{q^2}$ справедливы следующие свойства:

1) $[F_n : \mathbb{F}_{q^2}(x_i)]= q^{n-1}$ для всех $i=\overline{1,n}$;

2) если точка $P\in\mathbb{P}(F_n)$ является полюсом x_1 в F_n, то она является также и полюсом функций $x_2, x_3, \ldots, x_n$, при этом P разветвлена в расширении F_n/F_1 и не

разветвлена в $F_n/\mathbb{F}_{q^2}(x_n)$; ее дифферентная экспонента в расширении F_n/F_{n-1} равна $d(P)=q^2+q-2$;

3) если точка $R\in\mathbb{P}(F_n)$ не является ни полюсом, ни нулем x_1, то R не разветвлена в расширении F_n/F_1.

Доказательство. Пусть $P\in\mathbb{P}(F_n)$ - полюс x_1, тогда в силу леммы 1 сужение точки P полностью разветвлено в F_n/F_1 и является простым полюсом x_2. В свою очередь функция x_2 имеет единственный полюс в $\mathbb{F}_{q^2}(x_2, x_3)$ индекса ветвления q и эта точка является простым полюсом x_3, а, следовательно, снова в силу леммы 1, не разветвлена в $\mathbb{F}_{q^2}(x_2, x_3)/\mathbb{F}_{q^2}(x_3)$. По индукции получаем, что P является общим полюсом функций $x_2, x_3, ..., x_n$ и индексы ветвления сужений точки P в расширениях $\mathbb{F}_{q^2}(x_i, x_{i+1})/\mathbb{F}_{q^2}(x_i)$ (соотв. $\mathbb{F}_{q^2}(x_i, x_{i+1})/\mathbb{F}_{q^2}(x_{i+1})$) имеют следующий вид:

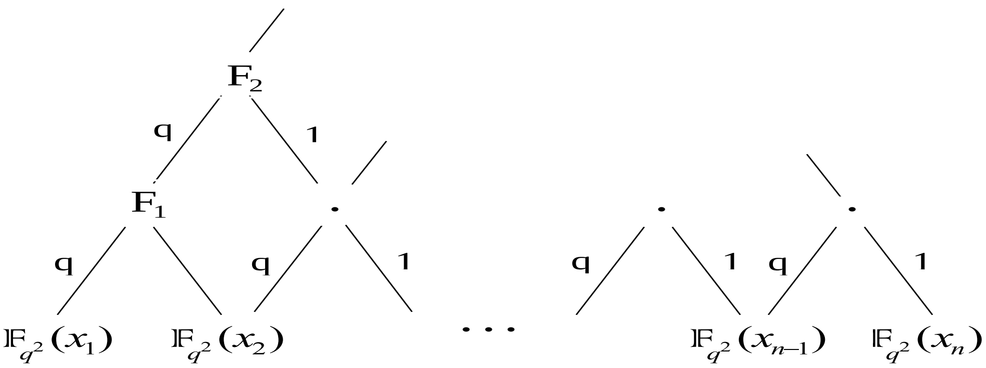


Рис. 1

Следующие утверждения следуют из предложения 1.2 [2] и рисунка 1:

1) P полностью разветвлена в F_n/F_1 и имеет индекс ветвления q^{n-1};

2) $[F_n : \mathbb{F}_{q^2}(x_i)]= q^{n-1}$ для всех $i=\overline{1,n}$;

3) P не разветвлена в $F_n/\mathbb{F}_{q^2}(x_n)$;

4) дифферентная экспонента точки P в расширении F_n/F_{n-1} равна $d(P)=q^2+q-2$.

Если точка $R\in\mathbb{P}(F_n)$ не является ни полюсом, ни нулем x_1, то по индукции при помощи леммы 1 видно, что R не является также ни полюсом, ни нулем функции x_i для всех $i=\overline{1,n-1}$, т.е. сужение R не разветвлено в расширении $\mathbb{F}_{q^2}(x_i, x_{i+1})/\mathbb{F}_{q^2}(x_i)$ для всех $i=\overline{1,n-1}$. Тогда в силу предложения 1.2 [2] получаем требуемое утверждение.

Наша дальнейшая цель - определить степень дифференты $\mathrm{Diff}(F_n/F_1)$. В силу предыдущей леммы остается только изучить поведение нулей $Q\in\mathbb{P}(F_n)$ функции x_1 в расширении F_n/F_{n-1}. Применяя лемму 1, получаем для них следующие возможности:

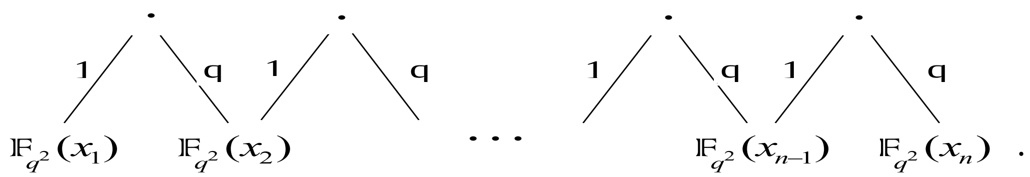
1) Q является общим нулем функций $x_1, x_2, ..., x_n$;

2) существует t, $1\le t<n$ такое, что: a) Q - общий нуль функций $x_1, ..., x_t$;

b) Q - общий полюс функций $x_{t+1}, ..., x_n$.

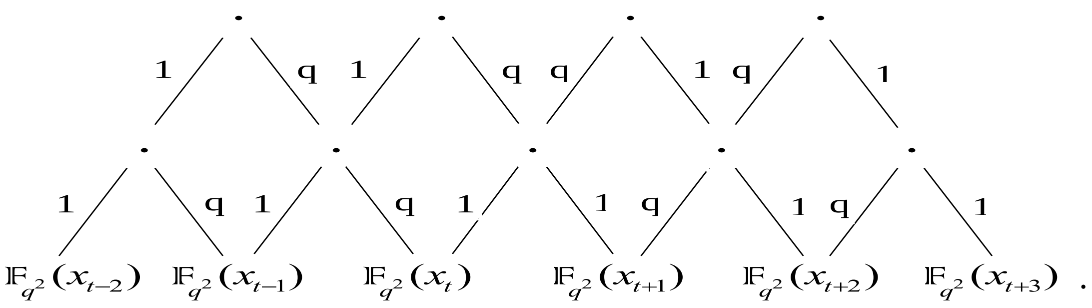
Условие: Q нуль функции x_t и полюс функции x_{t+1} влечет за собой как условие a), так и b).

В первом случае сужение Q на $\mathbb{F}_{q^2}(x_i, x_{i+1})$ имеет следующие индексы ветвления над $\mathbb{F}_{q^2}(x_i)$ (соотв. $\mathbb{F}_{q^2}(x_{i+1})$):



Следовательно точка Q является неразветвленной в расширении F_n/F_1.

Во втором случае индексы ветвления сужения Q на $\mathbb{F}_{q^2}(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ представлены на следующем рисунке:



Из этого рисунка невозможно определить индексы ветвления Q в расширении $F_n/\mathbb{F}_{q^2}(x_i)$ для всех i. В следующей лемме вычисляется индекс ветвления точки Q в расширении $\mathbb{F}_{q^2}(x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, x_{t+2})/\mathbb{F}_{q^2}(x_{t-1}, x_t, x_{t+1})$, позволяющий воссоздать всю картину.

Лемма 3. Для $k=\overline{1, t-1}$ положим $E_k=\mathbb{F}_{q^2}(x_{t-k}, ..., x_{t+k})$ и $H_k= E_k(x_{t+k+1})$. Если точка $Q\in\mathbb{P}(H_k)$ является нулем x_t, а также полюсом x_{t+1}, то она не разветвлена в H_k/E_k.

Доказательство. Пусть $z \in E_k$. Для $t=\overline{1,n-1}$ положим $u_{t+1}=x_{t+1}x_t$, тогда $H_k=E_k(u_{t+k+1}-z)$, причем $u_{t+k+1}-z$ - нуль неприводимого сепарабельного многочлена

$$\varphi(T)=T^q+T-(x_{t+k}^{q+1}-(z^q+z)) \in E_k[T].$$

Так как нормирование $v_Q(\varphi'(u_{t+k+1}-z))=v_Q(1)=0$, то в силу предложения III.5.10 [1] достаточно показать, что существует элемент $z \in E_k$ такой, что

$$v_Q((u_{t+k+1}-z)^q+(u_{t+k+1}-z))= v_Q(x_{t+k}^{q+1}-(z^q+z)) \geq 0. \qquad (1)$$

Заметим, что существует $\alpha \in \mathbb{F}_{q^2}^*$: $\alpha^{q-1}+1=0$ и $v_Q(u_{t+k}-\alpha)>0$. Используя доказательство леммы 3.4 [2], индукцией по k можно доказать, что $v_Q(u_{t+k+1}-\frac{\alpha^{q+1}}{u_{t+1-k}}) \geq 0$, что доказывает (1).

Лемма 4. Пусть $1 \leq t<n$ и точка $Q \in \mathbb{P}(F_n)$ удовлетворяет следующим свойствам: a) Q общий нуль функций $x_1, ..., x_t$; b) Q общий полюс функций $x_{t+1}, ..., x_n$. Тогда:

1) если $n \leq 2t$, то точка Q является неразветвленной в расширении F_n/F_{n-1};

2) для $2t<n$ Q разветвлена в F_n/F_{2t} и для $2t \leq s \leq n$ сужение Q не разветвлено в $F_n/\mathbb{F}_{q^2}(x_s)$;

3) если $2t<n$, то дифферентная экспонента точки Q в расширении F_n/F_{n-1} равна $d(Q)=q^2+q-2$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 2 и предложения 1.2 [2].

Лемма 5. Для $1 \leq t<\frac{n}{2}$ определим множество $X_t=\{Q \in \mathbb{P}(F_n) |\ Q$ нуль x_t и полюс $x_{t+1}\}$ и дивизор $A_t=\sum_{Q \in X_t} Q$. Тогда $deg\ A_t=(q-1)q^{t-1}$.

Доказательство. Согласно лемме 1 главные дивизоры элементов x_t и x_{t+1} имеют вид:

$$(x_t) = Q_0^t + R_1^t + \ldots + R_{q-1}^t - qP_\infty,\ (x_{t+1}) = qQ_0^t - R_1^t - \ldots - R_{q-1}^t - P_\infty.$$

Тогда для любой точки $Q \in X_t$ существует $i \in \{1,2,\ldots,q-1\}$ такой, что $Q \cap \mathbb{F}_{q^2}(x_t, x_{t+1})=R_i^t$. В силу леммы 3 и рисунка 1 получаем, что индекс ветвления ограничения Q в расширении $F_{2t}/\mathbb{F}_{q^2}(x_t, x_{t+1})$ равен q^{t-1}. Так как точка Q полностью разветвлена в F_n/F_{2t}, то $deg\ Q=deg\ (Q \cap F_{2t})$. Таким образом:

$$deg\ A_t=\frac{\sum_{i=1}^{q-1} deg\ \mathrm{Con}_{F_{2t}/\mathbb{F}_{q^2}(x_t,x_{t+1})}(R_i^t)}{q^{t-1}}=(q-1)q^{t-1}.$$

Лемма 6. Для $n\geq 2$ степень дифференты расширения F_n/F_{n-1} равна

$$deg\ \mathrm{Diff}(F_n/F_{n-1})=q^2+q-2.$$

Доказательство получается из определения дифференты и лемм 3, 4 и 5.

Лемма 7. Для $\alpha\in\mathbb{F}_{q^2}$ обозначим $R_\alpha\in\mathbb{P}(F_1)$ - нуль элемента $x_1-\alpha$ в F_1. Пусть $S=\{R_\alpha\in\mathbb{P}(F_1)|\ \alpha\in\mathbb{F}^*_{q^2}\}$, тогда все точки $R\in S$ полностью разветвлены в расширении F_n/F_1.

Доказательство. Пусть $R\in S$. Индукцией по n докажем следующие утверждения: R полностью разветвлена в F_n/F_1; для любого расширения $R'\in\mathbb{P}(F_n)$ точки R существует $\alpha\in\mathbb{F}^*_{q^2}$ такое, что R' является нулем $x_n-\alpha$.

Для n=1 утверждения тривиально. Предположим, что они выполняются для n. Так как $F_{n+1}=F_n(x_{n+1})$, где x_{n+1} - корень неприводимого многочлена $\varphi(T)=T^q+T\cdot\frac{1}{x_n^{q-1}}-x_n\in O_{R'}[T]$, то по теореме Куммера (III.3.7 [1]) получаем, что точка R' полностью разлагается в расширении F_n/F_{n-1} и для любого расширения $R''\in\mathbb{P}(F_{n+1})$ точки R' существует $\beta\in\mathbb{F}^*_{q^2}$ такое, что R'' является нулем $x_{n+1}-\beta$.

Доказательство теоремы. Рассмотрим подбашню $\mathcal{F}'=(F_1', F_2', F_3', ...)$ башни $\mathcal{F}$, где $F_n'=F_{2n-1}$. Так как $\mathcal{F}'\prec\mathcal{F}\prec\mathcal{F}'$, то согласно следствию 2.4 [2] имеем $\lambda(\mathcal{F})=\lambda(\mathcal{F}')$. Известно, что $\lambda(\mathcal{F}')\leq q-1$. Тогда, применяя предложение 2.7 [2] к башне $\mathcal{F}'$, получаем $\lambda(\mathcal{F}')=q-1$.

Библиографический список

1. *Stichtenoth H.* Algebraic Function Fields and Codes. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1993.

2. *Garcia A., Stichtenoth H.* Asymptotically good towers of function fields over finite fields // J. of Number Th. 1996. №61. P. 248-273.

I.S. A l e s h n i k o v

A NEW PROOF FOR ONE ASYMPTOTICALLY GOOD
SEQUENCE OF CURVES

In the presented work it is given a new, more simple proof of the fact, that the sequence $X=(X_1, X_2, X_3, ...)$ curves over the field $\mathbb{F}_{q^2}$, defined with equations:

$x_{i+1}^{q} + x_{i+1} \cdot \frac{1}{x_{i}^{q-1}} = x_i$ (for any $i = \overline{1, n-1}$), is asymptotically good and moreover it reaches the Drinfeld - Vlăduţ bound over the field $\mathbb{F}_{q^2}$.

УДК 514.76

СВОЙСТВО ВЗАИМНОСТИ ПОВОРОТНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ДВУМЕРНЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

А.В. Винник

(Одесский государственный университет)

Полностью исследован вопрос о взаимности поворотных диффеоморфизмов [1] двумерных римановых пространств. Доказано, что не существует нетривиальных поворотных диффеоморфизмов, обладающих свойством взаимности.

Определение 1. Диффеоморфизм $\rho: \overline{V}_2 \to V_2$ называем поворотным, если вследствие его каждая геодезическая кривая $\bar{\gamma}$ из риманова пространства $\overline{V}_2$ становится изопериметрической экстремалью поворота риманова пространства V_2.

Определение 2. Поворотный диффеоморфизм $\rho: \overline{V}_2 \to V_2$ обладает свойством взаимности, если обратный диффеоморфизм ρ^{-1}: $V_2 \to \overline{V}_2$ является поворотным.

Рассмотрим двумерные римановы пространства V_2, $\overline{V}_2$ с метрическими тензорами g и $\bar{g}$ соответственно. Пусть $g_{ij}(x^1,x^2)$ (i,j=1,2) - компоненты g в некоторой локальной карте. Для кривой $\gamma:(t_0,t_1) \to V_2$ с параметрическими уравнениями $x^h=x^h(t)$ построим векторы $\xi^h=\frac{dx^h}{dt}$, $\xi_1^h=\nabla_t\xi^h$, $\xi_2^h=\nabla_t\xi_1^h$. Здесь ∇_t - оператор ковариантного дифференцирования вдоль γ относительно метрической связности.

Определение 3. Кривые, которые являются решениями вариационной изопериметрической задачи extrem $\theta[\gamma]$,$s[\gamma]$=const с закрепленными концами, будем называть изопериметрическими экстремалями поворота (ИЭП).

В работах [1-5] показано, что кривая риманова пространства является нетривиальной ИЭП с постоянной $\bar{c}$ только тогда, когда вдоль нее гауссова кривизна пространства не равна нулю и пропорциональна с этой постоянной кривизне кривой:

$$K(x(s))=\bar{c}\,k(s), \qquad (1)$$

K - гауссова кривизна, k - кривизна γ, s - длина дуги.

Обозначим

$$s[\gamma] = \int \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}\, dt \quad \theta[\gamma] = \int k(s) ds$$