2. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков // Доклады АН СССР. 1991. Т. 320. №3. С. 531 – 535.

3. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности // Движения в пространствах аффинной связности. Казань, 1965. С. 5 – 179.

4. *Шапиро Я.Л.* О квазигеодезическом отображении // Изв. вузов. Мат., 1980. №9. С. 53 – 55.

5. *Игошин В.А*. Гомоморфизмы квазигеодезических потоков второй степени // Изв. вузов. Мат. 1990. №9. С.14 – 21.

6. *Игошин В.А*. Квазигеодезические потоки и их морфизмы: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. Казань, 1996.

7. *Игошин В.А.* О симметриях квазигеодезических потоков // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1997. №28. С. 28 – 30.

8. Игошин В.А., Китаева Е.К. Об аффинных симметриях квазигеодезических потоков // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2001. № 32. С. 49 – 52.

V. Igoshin, E. Kitaeva

THE MAXIMUM MOBILE QUADRATIC QUASIGEODESIC FLOWS WITH NONZERO CURVATURE

An every guasigeodesic flow (QF) $f \equiv (M, f)$ on a manifold M (dim M = n-1) locally may be presented by a second order differential equation:

$$d^2x^i / dt^2 = f^i(x^j, t, dx^j / dt), \quad 1 \le i, j \le n-1.$$

The series of theorems, concerning dimension of the Lie algebras of the maximum mobile quadratic QF with nonzero curvature, is obtained on the basis of the risults of [4] and the method of pulverization modeling [1,2]. For example,

Theorem 2. *The dimension of Lie algebra of affine symmetries of the maximum mobile quadratic QF (M,f) with nonzero curvature is n^2, where dim M = n-1.*

УДК 514.75

Г.В. Кузнецов

(Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого)

К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В СУБПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассматриваются вопросы геометрии движения жидкости в субпроективном пространстве, отнесенном к неголономным реперам. Приводятся выражения для *grad, div* и *rot.* Такое рассмотрение вызвано изучением геометрии сердечно-сосудистой системы человека.

Пусть C^3 – трехмерное субпроективное пространство [1] и R – поле реперов $R_x = \left\{x, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ в области $U \subset C^3$. Уравнения перемещения репера R_x имеют вид:

$$d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A, \quad d\vec{e}_A = \omega_A^B \vec{e}_B + \omega^B \vec{e}_{AB}, \tag{1}$$

где $\vec{e}_{AB}$ – векторы, образующие с векторами $\vec{e}_A$ репер второго порядка, *A, B* = 1, 2, 3 и $\vec{e}_{AB} \neq \vec{e}_{BA}$. Оказывается, что несимметричность векторов второго порядка по нижним индексам позволяет описывать геометрию турбулентного движения.

Дифференциальные формы ω^A *и* $\omega^B{}_A$ из равенств (1) удовлетворяют уравнениям структуры субпроективного пространства:

$$D\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A, \quad D\omega_B^A = \omega_B^C \wedge \omega_C^A + R_{BCK}^A \omega^C \wedge \omega^K, \tag{2}$$

где $R^A{}_{BCK}$ – тензор кривизны субпроективного пространства. Формы $\omega^A{}_B$ удовлетворяют условию

$$\omega_B^A + \omega_A^B = 0. \tag{3}$$

Выражение для градиента функции φ, как можно показать, будет иметь следующий вид:

$$grad\ \varphi = \frac{e^1 d\varphi \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + e^2 d\varphi \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + e^3 d\varphi \wedge \omega^1 \wedge \omega^2}{\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3}, \tag{4}$$

т.е. точно такой же вид, как и для евклидова пространства [2].

Пусть $\vec{\mathrm{v}}$ – вектор скорости жидкости, который в области *U* представим в виде $\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}^{\mathrm{A}} \vec{e}_A$. Дифференцируя последнее равенство и используя равенства (1), получим

$$d\vec{\mathrm{v}} = (d\mathrm{v}^{\mathrm{A}} + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \omega_B^A)\vec{e}_A + \mathrm{v}^{\mathrm{A}} \omega^B \vec{e}_{AB}. \tag{5}$$

В случае ортогонального репера будут верны равенства (3), а также $\left|\vec{e}_A\right| = 1$. Дифференцируя эти равенства, будем иметь $\omega^B \vec{e}_A \vec{e}_{AB} = 0$. С учетом линейной независимости форм ω^B, получим

$$\vec{e}_A \vec{e}_{AB} = 0. \tag{6}$$

На основании равенств (6) положим:

$$\vec{e}_{AB} = a_{AB}^C \vec{e}_C \quad (\mathrm{C} \neq \mathrm{A}). \tag{7}$$

Обозначим через dτ соответствующий элемент объема жидкости. Тогда дивергенцию вектора скорости получим, используя теорему Гаусса-Остроградского для объема параллелепипеда, образованного в произвольной точке жидкости векторами трех произвольных перемещений $d_1\vec{x},\ d_2\vec{x},\ d_3\vec{x}$. Отсюда получим

$$div\ \vec{\mathrm{v}}\ d\tau = d_1\vec{\mathrm{v}}\ d_2\vec{x}\ d_3\vec{x} + d_2\vec{\mathrm{v}}\ d_3\vec{x}\ d_1\vec{x} + d_3\vec{\mathrm{v}}\ d_1\vec{x}\ d_2\vec{x}. \tag{8}$$

С учетом (7) равенство (5) примет вид:

$$d\vec{\mathrm{v}} = (d\mathrm{v}^{\mathrm{A}} + \mathrm{v}^{\mathrm{B}} \omega_B^A)\vec{e}_A + \mathrm{v}^{\mathrm{A}} \omega^B a_{AB}^C \vec{e}_C \quad (C \neq A).$$

Тогда формула (8) окончательно примет вид:

$$\begin{aligned}\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 div\vec{\mathrm{v}} = (d\mathrm{v}^1 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}}\omega_B^1) \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 + (d\mathrm{v}^2 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}}\omega_B^2) \wedge \\ \wedge \omega^3 \wedge \omega^1 + (d\mathrm{v}^3 + \mathrm{v}^{\mathrm{B}}\omega_B^3) \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + \mathrm{v}^{\mathrm{C}} \underset{C\neq A}{a_{CA}^A})\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3,\end{aligned} \tag{9}$$

где в последнем члене предполагается вначале сумма по А, а затем сумма по С≠А и dτ = $\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3$ для ортогонального репера.

Для нахождения выражения ротора вектора скорости жидкости, воспользуемся формулой

$$\iiint rot\vec{\mathrm{v}}\ d\tau=-\iint[\vec{\mathrm{v}},\overrightarrow{d\sigma}],$$

где $\overrightarrow{d\sigma}$ – вектор элемента поверхности в области U и квадратные скобки обозначают векторное произведение. Применив эту формулу к объему dτ, получим

$$-rot\vec{\mathrm{v}}\ d\tau=[\vec{\mathrm{v}}+d_1\vec{\mathrm{v}},\overrightarrow{d\sigma_{23}}+d_1\overrightarrow{d\sigma_{23}}]+[\vec{\mathrm{v}},\overrightarrow{d\sigma_{32}}]+[\vec{\mathrm{v}},\overrightarrow{d\sigma_{13}}]+$$
$$+[\vec{\mathrm{v}}+d_2\vec{\mathrm{v}},\overrightarrow{d\sigma_{31}}+d_2\overrightarrow{d\sigma_{31}}]+[\vec{\mathrm{v}}+d_3\vec{\mathrm{v}},\overrightarrow{d\sigma_{12}}+d_3\overrightarrow{d\sigma_{12}}]+[\vec{\mathrm{v}},\overrightarrow{d\sigma_{21}}],$$

где $\overrightarrow{d\sigma_{AB}}=[d_A\vec{x},d_B\vec{x}]$ – элемент поверхности в точке x, образованный векторами, стоящими в скобках. После вполне понятных вычислений, получим

$$rot\ \vec{\mathrm{v}}\ d\tau=-\vec{e}_A\omega^A\wedge\omega^B\wedge(d\mathrm{v}^K+\mathrm{v}^L\omega_L^K)(\vec{e}_B\vec{e}_K)-\vec{e}_A\omega^A\wedge\omega^B\wedge\mathrm{v}^K\omega^L\underset{S\neq K}{a_{KL}^S}(\vec{e}_B\vec{e}_S).\quad(10)$$

Для ортогонального репера равенство (10) примет вид:

$$\begin{aligned}-rot\ \vec{\mathrm{v}}\ d\tau&=\vec{e}_1(\omega^1\wedge\omega^2\wedge(d\mathrm{v}^2+\mathrm{v}^L\omega_L^2)+\omega^1\wedge\omega^3\wedge(d\mathrm{v}^3+\mathrm{v}^L\omega_L^3)+\\&+d\tau(\mathrm{v}^K\underset{K\neq2}{a_{K3}^2}-\mathrm{v}^K\underset{K\neq3}{a_{K2}^3}))+\vec{e}_2(\omega^2\wedge\omega^1\wedge(d\mathrm{v}^1+\mathrm{v}^L\omega_L^1)+\\&+\omega^2\wedge\omega^3\wedge(d\mathrm{v}^3+\mathrm{v}^L\omega_L^3)+d\tau(\mathrm{v}^K\underset{K\neq3}{a_{K1}^3}-\mathrm{v}^K\underset{K\neq1}{a_{K3}^1}))+\vec{e}_3(\omega^3\wedge\omega^1\wedge\\&\wedge(d\mathrm{v}^1+\mathrm{v}^L\omega_L^1)+\omega^3\wedge\omega^2\wedge(d\mathrm{v}^2+\mathrm{v}^L\omega_L^2)+d\tau(\mathrm{v}^K\underset{K\neq1}{a_{K2}^1}-\mathrm{v}^K\underset{K\neq2}{a_{K1}^2})).\end{aligned}\quad(11)$$

Выбирая вектор $\vec{e}_3$ по направлению касательной линии тока жидкости, запишем: $\vec{\mathrm{v}}=\mathrm{v}\vec{e}_3$, из уравнения неразрывности потока жидкости получим, что $div\ \vec{\mathrm{v}}=0$. С учетом последних замечаний из равенства (9) имеем

$$\mathrm{v}\omega_3^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3+\mathrm{v}\omega_3^2\wedge\omega^3\wedge\omega^1+d\mathrm{v}\wedge\omega^1\wedge\omega^2+\mathrm{v}^K\underset{K\neq A}{a_{KA}^A}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3=0.$$

Введя обозначения $\omega_3^1=-\omega_1^3=q_A\omega^A,\quad\omega_2^3=-\omega_3^2=p_A\omega^A$, последнее равенство перепишем в виде:

$$\frac{d\ln\mathrm{v}}{\mathrm{ds}}\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3=(p_2-q_1-(a_{31}^1+a_{32}^2))\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3,$$

где $ds=\omega^3$. Отсюда имеем

$$\frac{d\ln\mathrm{v}}{\mathrm{ds}}=p_2-q_1-(a_{31}^1+a_{32}^2).\quad(12)$$

Если правую часть равенства (12) по аналогии с [2] назвать средней кривизной векторного поля $\vec{\mathrm{v}}$ или средней кривизной линий тока жидкости, то справедлива

Теорема 1. *В каждой точке потока жидкости логарифмическая производная от величины скорости по направлению линии тока равна средней кривизне конгруэнций линий тока жидкости.*

Правая часть равенства (12) обращается в нуль тогда и только тогда, когда разность $p_2 - q_1$ равна сумме первой и второй компонент векторов второго порядка $\vec{e}_{31}$ и $\vec{e}_{32}$ соответственно при их представлении через вектора первого порядка. Конгруэнцию линий в области U субпроективного пространства, для которой $p_2 - q_1 - (a^1_{31} + a^2_{32}) = 0$, назовем минимальной конгруэнцией. Используя теорему 1 и понятие минимальной конгруэнции линий для субпроективного пространства в определенной области, сделаем вывод.

Теорема 2. *Величина скорости потока жидкости в субпроективном пространстве постоянна вдоль некоторой линии тогда и только тогда, когда данная линия принадлежит минимальной конгруэнции.*

Пусть вихревой вектор имеет вид:

$$\vec{\nu} = \frac{1}{2} rot\vec{\mathrm{v}} = \frac{1}{2}\nu^A \vec{e}_A .$$

Тогда из равенства (11) получим

$$-\nu^1 = -\mathrm{vp}_3 - \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}a^2_{33}, \quad -\nu^2 = -\mathrm{vq}_3 + \mathrm{v}_1 - \mathrm{v}a^1_{33}, \\ -\nu^3 = \mathrm{vq}_2 + \mathrm{vp}_1 + \mathrm{v}(a^1_{32} - a^2_{31}). \tag{13}$$

Гауссова кривизна векторного поля $\vec{e}_3$, коллинеарного вектору скорости жидкости, будет равна:

$$K_g = -p_2 q_1 + q_1 a^2_{32} - p_2 a^1_{31} + a^2_{32} a^1_{31} - \frac{1}{4}(p_1 - q_2 - a^1_{32} - a^2_{31})^2 . \tag{14}$$

На основании формул (13) и (14) можно сделать вывод, что компоненты вихря выражаются через компоненты векторов второго порядка, а также гауссова кривизна векторного поля $\vec{e}_3$ выражается через компоненты векторов второго порядка. Далее также можно рассматривать геометрию стационарного движения жидкости в субпроективном пространстве, основываясь на геометрии конгруэнции линий как линий тока жидкости.

Список литературы

1. *Каган В.Ф.* Субпроективные пространства. М., 1961.

2. *Бюшгенс С.С.* Геометрия стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости // Изв. АН. Сер. мат. 1948. Т. 12. С. 481 – 512.

G. Kuznetsov

TO THE GEOMETRIC THEORY OF STATIONARY DRIVING OF A LIQUID IN SUBPROJECTIVE SPACE

The problems of geometry of driving of a liquid in subprojective space referred to nonholonomic frames are considered. The expressions for grad, div and rot are reduced. Such reviewing is caused by study of geometry intimately cardiovascular systems of the men.