из (9), (10) следует

$$P=0,\quad \bar\nabla=\nabla^F,\quad \bar P(X,Y)=\bar\nabla_X Y-\nabla_X Y=F^{-1}(\nabla_X F)(Y).$$

Таким образом имеет место

С л е д с т в и е 3. Если M, M' параллельные поверхности, то

$$\bar\nabla=\nabla^F,\quad \bar P(X,Y)=F^{-1}(\nabla_X F)(Y).$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда M, M' - гиперповерхности в E_{n+1}. Тогда $\omega X=\sigma(X)n$, где n -единичный вектор нормали к $M, \sigma(X)=b(X,a), b\in T_2^0(M)$ - асимптотический тензор гиперповерхности M,

$$\beta(X,Y)=\tilde b(X,Y)n,\quad \tilde b(X,Y)=(\bar\nabla'_X\sigma)(Y)+b(X,FY).$$

Тогда из (10) следует

$$\sigma(X)\tilde b(Z,Y)=\bar g(P(Z,Y),X).$$

Введем в рассмотрение вектор c, где $\sigma(X)=g(X,c)$. Тогда

$$P(X,Y)=\tilde b(X,Y)c,$$

$$\bar P(X,Y)=F^{-1}((\nabla_X F)(Y)-\sigma(Y)AX-\tilde b(X,Y)Fc).$$

Библиографический список

1. Ч е ш к о в а М.А. О связностях, индуцируемых отображением поверхностей в евклидовом пространстве // Геометрия многомерных пространств: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Алтайский ун-т. Барнаул, 1991. С.82-86.

2. К о б а я с и Ш., Н о м и д з у К. Основы дифференциальной геометрии. М., 1981. Т.2. 414 с.

3. В е д е р н и к о в С.В. Геометрия пространств пар // Известия АН БССР. Минск, 1980. 39 с. Деп. в ВИНИТИ 25.02.80. № 1454.

УДК 514.76

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЭКВИДИСТАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ ПРОСТРАНСТВ $V_n(K)$

И.Г.Ш а н д р а

(Государственная финансовая академия)

В работе показано, что эквидистантные псевдоримановы пространства могут быть разбиты на два непересекающихся класса, замкнутых относительно геодезических отображений. Доказано, что множество решений основных уравнений пространства $V_n(K)$ образует йорданову алгебру, изоморфную (в случае $K\neq 0$) алгебре параллельных симметрических билинейных форм на некотором $(n+1)$-мерном псевдоримановом пространстве.

§ 1. Предварительные сведения

1. Пусть (V_n, g) - n-мерное псевдориманово пространство. Ковекторное поле φ_i на V_n называется конциркулярным, если оно удовлетворяет условиям:

$$\nabla_j\varphi_i=\rho g_{ij}\quad (i,j=1,2,\dots,n), \tag{1}$$

где ∇ - ковариантная производная относительно связности Леви-Чивита, а ρ - некоторый инвариант. Если $\rho\neq 0$, то говорят, что конциркулярное поле принадлежит к основному типу, если $\rho=0$, то - к исключительному. Если для ρ имеют место условия $\nabla_i\rho=K\varphi_i$, где K - некоторая константа, то конциркулярное поле называется специальным [1].

Псевдоримановы пространства, допускающие конциркулярное поле, называются эквидистантными [2]. Эквидистантные пространства, допускающие конциркулярное поле основного типа, мы будем называть пространствами основного типа, а допускающие только лишь ковариантно постоянные поля - исключительного типа.

2. Пусть псевдориманово пространство (V_n, g) допускает геодезическое отображение на некоторое псевдориманово пространство $(\bar V_n, \bar g)$, тогда объекты связностей этих пространств удовлетворяют следующим соотношениям [2]:

$$\bar\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\psi_{(j}\delta^i_{k)}, \tag{2}$$

где $\psi_j(=\nabla_j\psi)$ - некоторое градиентное ковекторное поле. В случае, когда $\psi_j\neq 0$, геодезическое отображение называется нетривиальным (НГО).

Для того, чтобы псевдориманово пространство (V_n, g) допускало НГО, необходимо и достаточно, чтобы на нем существовало невырожденное тензорное поле $a_{ij}(=a_{ji})$, удовлетворяющее условиям [2]:

$$\nabla_k a_{ij}=\lambda_{(i}g_{j)k}, \tag{3}$$

при некотором ковекторе $\lambda_i\neq 0$. Ковекторы λ_i и ψ_i связаны соотношениями [2]:

$$\lambda_i = -\psi_s a^s_i, \tag{4}$$

где $a^s_i = a_{ti} g^{ts}$, а g^{ts} – компоненты контравариантного метрического тензора. Если для λ_i имеют место условия

$$\nabla_j \lambda_i = k a_{ij} + \mu g_{ij}, \tag{5}$$

$$\nabla_j \mu = 2k\lambda_j, \tag{6}$$

где k – некоторая константа, то (V_n, g) называется пространством $V_n(k)$ [3].

3. Известно [4], что если на псевдоримановом пространстве существует конциркулярное поле φ_i и оно допускает НГО на некоторое пространство $(\bar V_n, \bar g)$, то на $(\bar V_n, \bar g)$ также существует конциркулярное поле $\bar\varphi_i$, причем

$$\bar g = \bar e^{\psi}(g + \psi_s \varphi_t g^{st}). \tag{7}$$

Все эквидистантные пространства основного типа допускают НГО [2], а исключительного типа со знакоопределенной метрикой не допускают НГО [5].

§ 2. Пространства $V_n(0)$ и геодезические отображения эквидистантных пространств

Все исследования в данной работе проводятся локально, в классе достаточно гладких функций.

Л е м м а I. Пусть φ_i – ковариантно постоянное поле на эквидистантном пространстве исключительного типа. Тогда, если (V_n, g) допускает НГО, то на нем рекуррентным способом:

а) $\overset{1}{\varphi}_i = \varphi_i \ (= \nabla_i \varphi)$, б) $\overset{m}{\varphi}_i = a^t_i \nabla_t \overset{m-1}{\varphi} - \overset{m-1}{\varphi} \lambda_i$ (8)

может быть построена последовательность градиентных ковекторных полей $\{\overset{m}{\varphi}_i\}$, $m \in N$, удовлетворяющих следующим условиям

а) $\nabla_j \overset{m}{\varphi}_i = 0$, б) $\overset{m}{\varphi}_i \lambda^i = 0$, (9)

где $\lambda^i = \lambda_s g^{si}$ и a^s_i – тензоры, участвующие в уравнениях (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть на (V_n, g) существует ковекторное поле φ_i и

$$\nabla_j \varphi_i = 0. \tag{10}$$

Известно [5], что, если (V_n, g) допускает НГО и на нем существует ковариантно постоянное ковекторное поле, то (V_n, g) является пространством $V_n(0)$, т.е. $\nabla_j \lambda_i = \mu g_{ij}$. Но, т.к. (V_n, g)-эквидистантное пространство исключительного типа, то $\mu = 0$, следовательно

$$\nabla_j \lambda_i = 0. \tag{11}$$

Тогда на основании (3), (10), (11)

$$\nabla_j \overset{2}{\varphi}_i = \nabla_j (a^s_i \varphi_s - \varphi \lambda_i) = \lambda^s \varphi_s g_{ij}. \tag{12}$$

Отсюда на основании нашего предположения $\lambda^s \varphi_s = 0$. Справедливость леммы для произвольного ковектора последовательности (9) вытекает из принципа математической индукции.

З а м е ч а н и е I. Соотношения (8б) могут быть записаны в форме:

$$\overset{m}{\varphi}_i = \overset{m-1}{a}{}^s_i \varphi_s - \overset{1}{\varphi} \overset{m-2}{a}{}^s_i \lambda_s - \overset{2}{\varphi} \overset{m-1}{a}{}^s_i \lambda_s - \ldots - \overset{m-2}{\varphi} \overset{1}{a}{}^s_i \lambda_s - \overset{m-1}{\varphi} \lambda_i, \tag{13}$$

где $\overset{m}{a}{}^i_s$ – m- ая степень аффинора a^i_s.

З а м е ч а н и е 2. Из доказательства леммы вытекает, что $\nabla_i \lambda_j = 0$, поэтому мы можем построить соответствующую последовательность ковариантно постоянных ковекторов $\{\overset{m}{\lambda}_i\}$. Причем в данной последовательности может быть не более $p \ (\le n-2)$ линейно независимых членов (в противном случае пространство было бы локально евклидовым и допускало бы конциркулярное поле основного типа [3]). Поэтому

$$\overset{p+1}{\lambda}_i = c_1 \overset{1}{\lambda}_i + c_2 \overset{2}{\lambda}_i + \ldots + c_p \overset{p}{\lambda}_i \quad (c_m = \mathrm{const}). \tag{14}$$

Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\lambda_i = 0$, т.е.

$$a^s_i \overset{p}{\lambda}_s = \overset{p}{\lambda} \lambda_i. \tag{15}$$

Действительно, применяя подстановку $\overset{1}{\bar\lambda} = \overset{1}{\lambda} + c_p$, $\overset{2}{\bar\lambda} = \overset{2}{\lambda} - c_p \overset{1}{\lambda} + c_{p-1}$, $\ldots$, $\overset{p}{\bar\lambda} = \overset{p}{\lambda} - c_p \overset{p-1}{\lambda} - c_{p-1} \overset{p-2}{\lambda} - c_2 \overset{1}{\lambda} + c_1$, получим соотношения (15).

С л е д с т в и е I. Пусть φ_i – произвольное ковекторное ковариантно постоянное поле на эквидистантном пространстве (V_n, g) исключительного типа, допускающем НГО, тогда

$$\varphi^i \overset{m}{\lambda}_i = 0, \quad \forall m \in N. \tag{16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что соотношения (9б) в случае, когда $\varphi_i = \lambda_i$ на основании (13) эквивалентны условиям

а) $\lambda_s \lambda^s = 0$, б) $\lambda_s \overset{m}{a}{}^s_t \lambda^t = 0$, $\forall m \in N$. (17)

Тогда отсюда, принимая во внимание (9б) и (13), получаем

$$\varphi^i \overset{m}{\lambda}_i = \varphi^i \overset{m-1}{a}{}^t_i \lambda_t = \varphi_i \overset{m-1}{a}{}^i_t \lambda^t = \lambda^t \overset{m}{\varphi}_t = 0.$$

Т е о р е м а I. Пусть эквидистантное пространство (V_n, g) основного (исключительного) типа допускает НГО на некоторое псевдориманово пространство $(\bar V_n, \bar g)$, тогда $(\bar V_n, \bar g)$ также является эквидистантным пространством основного (исключительного) типа.

Другими словами, эквидистантные пространства распадаются на два непересекающихся класса – основного и исключительного типа, каждый из которых замкнут относительно НГО.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Пусть эквидистантное пространство (V_n, g) исключительного типа допускает НГО на эквидистантное пространство $(\bar V_n, \bar g)$ основного типа. Пусть φ_i и $\bar\varphi_i$ – соответствующие ковекторы исключительного и основного типов на (V_n, g) и $(\bar V_n, \bar g)$ соответственно. Тогда из (7) с учетом того, что $\rho = 0$ и $\bar\rho \neq 0$, мы получаем, что

$$\psi_i \varphi^i = 0. \tag{18}$$

Как было показано выше (замечание I), на (V_n, g) существует ковектор λ^{ρ}_i, удовлетворяющий условию (15). Свернув (15) по индексу i с тензором $\bar a^i_k$ (обратным к a^i_k), получим

$$\lambda^{\rho}_k = -\overset{\rho}{\lambda}\psi_k. \tag{19}$$

На основании следствия I ковектор λ^{ρ}_i ортогонален φ_i, но т.к. $\overset{\rho}{\lambda} \neq 0$, то из (19) вытекает, что ψ_i также ортогонален φ_i. А это противоречит (18) и тем самым доказывает нашу теорему.

Данная теорема может быть обобщена на случай геодезических отображений эквидистантных пространств с вырожденной метрикой [6].

§ 3. Йордановы алгебры пространств $V_n(K), K \neq 0$.

Рассмотрим псевдориманово пространство $(\tilde V_{n+1}, \tilde g)$, метрический тензор которого в некоторой специальной системе координат (x^0, x^k) может быть приведен к виду:

$$(\tilde g_{IJ}) = \frac{1}{k} e^{2kx^0} \left(\begin{array}{c|c} -k & 0 \\ \hline 0 & g_{ij}(x^k) \end{array}\right), \tag{20}$$

где $g_{ij}(x^k)$ – метрический тензор некоторого n-мерного псевдориманова пространства (V_n, g), $k = const \neq 0$ $(I, J = 0, 1 \dots n)$. Нетрудно получить компоненты контравариантного метрического тензора в данной системе координат:

$$\tilde g^{IJ} = k e^{-2kx^0} \left(\begin{array}{c|c} -\frac{1}{k} & 0 \\ \hline 0 & g^{ij}(x^k) \end{array}\right). \tag{21}$$

Вычислив компоненты связности Леви-Чивита в этой системе координат, можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Л е м м а 2. Для того, чтобы симметрическое тензорное поле $\tilde a_{IJ}$ было ковариантно постоянным на $(\tilde V_{n+1}, \tilde g)$, необходимо и достаточно, чтобы в специальной системе координат (x^0, x^k) оно приводилось к виду:

$$(\tilde a_{IJ}) = e^{2kx^0} \left(\begin{array}{c|c} \mu(x^k) & \lambda_j(x^k) \\ \hline \lambda_i(x^k) & a_{ij}(x^k) \end{array}\right), \tag{22}$$

где $a_{ij}\ (= a_{ji})$, $\lambda_i \neq 0$, μ – тензорные поля соответствующей валентности, удовлетворяющие на (V_n, g) системе уравнений (3), (5), (6).

Тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством решений системы (3), (5), (6) на (V_n, g) и множеством решений системы $\tilde\nabla_P \tilde a_{IJ} = 0$ $(\tilde a_{IJ} = \tilde a_{JI})$ на $(V_{n+1}, \tilde g)$. Нетрудно показать, что подобное соответствие существует между специальными конциркулярными полями на (V_n, g) и ковариантно постоянными ковекторными полями на $(\tilde V_{n+1}, \tilde g)$.

Т е о р е м а 2. Линейное пространство решений системы (3), (5), (6) на (V_n, g) при $K \neq 0$ образует специальную Йорданову алгебру относительно операции умножения $(\overset{1}{a}, \overset{1}{\lambda}, \overset{1}{\mu}) \times (\overset{2}{a}, \overset{2}{\lambda}, \overset{2}{\mu}) = (\overset{3}{a}, \overset{3}{\lambda}, \overset{3}{\mu})$, где

$$2\overset{3}{a}_{ij} = k\,\overset{1}{a}{}^s_{(i}\,\overset{2}{a}_{j)s} - \overset{1}{\lambda}_{(i}\,\overset{2}{\lambda}_{j)}, \tag{23}$$

$$2\overset{3}{\lambda}_i = k\,(\overset{1}{a}{}^s_i\,\overset{2}{\lambda}_s + \overset{2}{a}{}^s_i\,\overset{1}{\lambda}_s) - \overset{1}{\mu}\,\overset{2}{\lambda}_i - \overset{2}{\mu}\,\overset{1}{\lambda}_i, \tag{24}$$

$$\overset{3}{\mu} = k\,\overset{1}{\lambda}{}^s\,\overset{2}{\lambda}_s - \overset{1}{\mu}\,\overset{2}{\mu}. \tag{25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\overset{1}{\tilde A}_{IJ}$ и $\overset{2}{\tilde A}_{IJ}$ – ковариантно постоянные поля на $(\tilde V_{n+1}, \tilde g)$, соответствующие решениям $(\overset{1}{a}, \overset{1}{\lambda}, \overset{1}{\mu})$ и $(\overset{2}{a}, \overset{2}{\lambda}, \overset{2}{\mu})$ системы (3), (5), (6). Тогда симметрическое поле

$$\overset{3}{A}_{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overset{1}{A}_{IP}\,\tilde g^{PT}\,\overset{2}{A}_{TJ} + \overset{2}{A}_{IP}\,\tilde g^{PT}\,\overset{1}{A}_{TJ}\right) \tag{26}$$

также является ковариантно постоянным на $(\tilde V_{n+1}, \tilde g)$. Более того, из (26) следует, что $\overset{3}{A}_{IJ}$ есть Йорданова скобка $\overset{2}{A}_{IJ}$ и $\overset{3}{A}_{IJ}$, поэтому получившаяся алгебра является специальной Йордановой алгеброй. Из (26) на основании (22) вытекает, что соответствующее $\overset{3}{A}$ решение $(\overset{3}{a}, \overset{3}{\lambda}, \overset{3}{\mu})$ будет определяться по формулам (23) – (25).

Данная теорема получена автором в [7] другим способом, но настоящее доказательство намного проще и легко может быть обобщено на случай голоморфно-проективных отображений келеровых пространств.

Келерово пространство (K_n, g, F) называется пространством $K_n(K)$, если на нем существует решение $a_{ij}\ (= a_{ji}),\ \lambda_i\ (\neq 0),\ \mu$ системы уравнений [8]:

$$\nabla_k a_{ij} = \lambda_{(i} g_{j)k} - e\, \lambda_t F^t_{(i} F_{j)k}, \tag{27}$$

$$\text{а)}\ \nabla_k \lambda_i = \mu g_{ik} + k\, a_{ik}, \qquad \text{б)}\ \nabla_k \mu = 2k\lambda \tag{28}$$

где $a_{ij} = e\, a_{st} F^s_i F^t_j$, $F_{ij} = F^s_j g_{is}$, $\nabla_k F^i_j = 0$, $F^s_i F^j_s = e\, \delta^j_i$, $F_{ij} + F_{ji} = 0$, k - некоторая константа, $e = \pm 1$ (случай $e = -1$ соответствует эллиптическим келеровым пространствам, а $e = 1$ - гиперболическим келеровым пространствам).

Рассмотрим $(n+2)$-мерное псевдориманово пространство $(\bar V_{n+2}, \bar G)$, метрический тензор $\bar G_{TQ}$ $(T, Q, \ldots = \overline{0, n+1})$ которого и взаимный к нему тензор $\bar G^{TQ}$ в некоторой специальной системе координат (x^0, x^k, x^{n+1}) имеют вид:

$$(\bar G_{TQ}) = \left(\begin{array}{c|c|c} -k & 0 & 0 \\ \hline 0 & g_{tq}(x^k) + k e\, \tau_t \tau_q & k e\, \tau_t (x^k) \\ \hline 0 & k e\, \tau_q (x^k) & k e \end{array}\right) \frac{1}{k} e^{2kx^0}, \tag{29}$$

$$(\bar G^{TQ}) = \left(\begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & k\, g^{tq} & -k e\, g^{ti} \tau_i \\ \hline & -k e\, g^{iq} \tau_i & e - k g^{ij} \tau_i \tau_j \end{array}\right) \cdot e^{-2kx^0}, \tag{30}$$

где $g_{tq}(x^k)$ - метрика некоторого келерова пространства (K_n, g, F), $k \neq 0$, а $\tau_i(x^k)$ - ковектор потенциал, т.е. $F_{ij} = \partial_{[j} \tau_{i]}$ (форма F_{ij} - точная).

Л е м м а 3. Для того, чтобы симметрическое тензорное поле $\bar a_{TQ}$ было ковариантно постоянным на $(\bar V_{n+2}, \bar G)$, необходимо и достаточно, чтобы в специальной системе координат (x^0, x^k, x^{n+1}) оно приводилось к виду:

$$(\bar a_{TQ}) = e^{2kx^0} \left(\begin{array}{c|c|c} \mu (x^k) & \lambda_q (x^k) & 0 \\ \hline \lambda_t (x^k) & a_{tq}(x^k) + \tau_{(t} F^i_{q)} \lambda_i + \mu \tau_t \tau_q & \lambda_i F^i_t - \mu \tau_t \\ \hline 0 & \lambda_i F^i_q + \mu \tau_q & \mu (x^k) \end{array}\right), \tag{31}$$

где $a_{ij}\ (= a_{ji}),\ \lambda_i\ (\neq 0),\ \mu$ удовлетворяют соотношениям (27), (28).

Справедливость данной леммы может быть легко установлена непосредственной проверкой. На основании леммы 3, аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 2, может быть получена

Т е о р е м а 3. Множество решений системы (28), (29) на (K_n, g, F) образует специальную Йорданову алгебру относительно операции умножения $(\overset{1}{a}, \overset{1}{\lambda}, \overset{1}{\mu}) \times (\overset{2}{a}, \overset{2}{\lambda}, \overset{2}{\mu}) = (\overset{3}{a}, \overset{3}{\lambda}, \overset{3}{\mu})$, где $\overset{3}{a}, \overset{3}{\lambda}, \overset{3}{\mu}$ определяются по формулам (24), (25) и формуле

$$\overset{3}{a}_{ij} = k\, \overset{1}{a}{}^s_{(i}\, \overset{2}{a}_{j)s} - \overset{1}{\lambda}_{(i} \overset{2}{\lambda}_{j)} + e\, \overset{1}{\lambda}_p \overset{2}{\lambda}_q F^p_{(i} F^q_{j)}. \tag{32}$$

Библиографический список

1. Vries H.L. Über Riemannsche Räume, die infinitesimal konforme Transformationen gestatten // Math. Z. 1954. V. 60. №3. S. 328 - 347.

2. С и н ю к о в Н.С. Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979. 256 с.

3. К и о с а к В.А., М и к е ш Й. Геодезические отображения и проективные преобразования // Движения в обобщенных пространствах / Рязанск. пед. ин-т. Рязань, 1988. С.29-31.

4. Г о р б а т ы й Е.З. О геодезическом отображении эквидистантных римановых пространств и пространств первого класса // Укр. геометр. сб. 1972. № 12. С.45-53.

5. М и к е ш Й. О сасакиевых и эквидистантных келеровых пространствах // ДАН СССР. 1986. Т.291. № 1. С.33-36.

6. Ш э н д р а И.Г. Горизонтально эквидистантные расслоенные пространства // Изв. вузов. Матем. 1988. № 12. С.86-89.

7. Ш а н д р а И.Г. Пространства $V_n(K)$ и Йордановы алгебры // Памяти Лобачевского посвящается: Тр. геометр. семинара / Казанский ун-т. Казань, 1992. Вып.1. С.99-104.

8. Mikeš J. F-planar mappings and transformations // Diff. Geometry and its appl.: Proceedings of Conf., Brno, 1980. P. 245 - 254.