чаем следующие соотношения:

$$\beta = -2, \quad b = n, \quad l = \frac{a(1-n^2)}{n}, \quad \eta = -\frac{2a}{n}, \quad \gamma = 2a,$$

$$da = (2ac - 2m - 4\alpha a)\theta, \quad m + ap + 2a = 0, \quad (14)$$

$$a\,dn - n\,da + (n^3 - 4a^2 n - \alpha n^3 + a^2 n^3)\theta = 0.$$

Анализируя системы уравнений (5) и (14), получаем, что произвол существования конгруэнции $(C)_Q$ – две функции одного аргумента.

Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве.- Труды геом.семинара. ВИНИТИ АН СССР, М., 1969, 2, с.179-206.

2. Ф и н и к о в С.П. Проективно-дифференциальная геометрия. М.-Л., ОНТИ, 1937.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 10 1979

УДК 513.73

В.Н. Х у д е н к о

О МНОГООБРАЗИЯХ МНОГОМЕРНЫХ КВАДРИК

В работе [1] введено понятие характеристического многообразия квадрики Q_p ($1 \leq p \leq n-3$), принадлежащей многообразию $(h, h, n)^2_p$). В настоящей работе, являющейся продолжением [1], в проективном пространстве P_n, рассматриваются многообразия $(h, h, n)^2_p$ квадрик Q_p с характеристическими точками. Введено понятие характеристически невырожденного многообразия квадрик Q_p, доказано существование конечного числа характеристически невырожденных многообразий квадрик Q_p с характеристическими точками.

Напомним, что характеристическим многообразием квадрики $Q_p \in (h, h, n)^2_p$ названо алгебраическое многообразие пространства P_n, определяемое системой уравнений:

$$\Gamma^i_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad \Gamma^{\hat{a}i}_\alpha x^\alpha = 0, \quad \Gamma^i_\xi x^\xi + x^i = 0,$$

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^a = 0;$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p+2; \quad i = 1, 2, \ldots, h; \quad \xi = h+1, \ldots, p+2;$$

$$a = p+3, p+4, \ldots, n+1; \quad \hat{a} = p+3, p+4, \ldots, n).$$

О п р е д е л е н и е. Многообразие $(h,h,n)^2_p$ квадрик Q_p, удовлетворяющее соотношениям

$$1)\ \forall i \le h \quad \Gamma^i_{\alpha\beta} \ne \lambda a_{\alpha\beta},$$

$$2)\ \forall i \le h \quad \det(\Gamma^i_{\alpha\beta}) \ne 0,$$

$$3)\ \forall \alpha,\beta \quad \mathrm{rang}\,(\Gamma^i_{\alpha\beta}) = h,$$

$$4)\ \mathrm{rang}\,(\Gamma^i_\xi) \ne 0,$$

$$5)\ \forall \alpha \quad \mathrm{rang}\,(\Gamma^{\hat{\alpha} i}_{\alpha}) = \min\{h, n-p-2\},$$

назовем характеристически невырожденным. В дальнейшем будем рассматривать только такие многообразия.

Согласно [1], соотношение

$$n = \frac{p(h+1)}{h} \tag{1}$$

является, для характеристически невырожденных многообразий $(h,h,n)^2_p$, необходимым условием существования характеристических точек. Легко заметить, что условие (1) эквивалентно условиям

$$p = h\ell, \quad n = \ell(h+1), \tag{2}$$

где $\ell = 3, 4, 5, \dots\dots$

Т е о р е м а 1. Для любого числа p ($p \geqslant 3$), где p - размерность квадрики Q_p, существует одномерное характеристически невырожденное многообразие квадрик Q_p с характеристическими точками. Каждая квадрика Q_p таких многообразий обладает четырьмя характеристическими точками.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p - размерность квадрики Q_p, причем выполнены условия (2). Положим

$$h = 1, \quad \ell = p,$$

получим $n = 2p$.

Следовательно, для числа p нашлось многообразие (I, I, 2p) квадрик Q_p с характеристическими точками. Согласно теореме 2 работы [1], число характеристических точек равно 2^{h+1}. Для квадрики $Q_p \in (1,1,2p)^2_p$ получаем $2^{h+1} = 4$.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Пусть p ($p \geqslant 3$) размерность многомерной квадрики Q_p. Существует лишь конечное число $\mathcal{T}$ характеристически невырожденных многообразий квадрик Q_p с характеристическими точками, причем

$$\mathcal{T} = \begin{cases} \tau + 1, & \text{если } p \text{ -нечетное число} \\ \tau, & \text{если } p \text{ -четное число.} \end{cases}$$

Здесь τ число всевозможных различных делителей величины p, отличных от единицы и самого p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим p в виде

$$p = s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \dots s_g^{\alpha_g}, \tag{3}$$

где $s_1 > s_2 > \dots > s_g$ взаимно просты, а натуральные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_g$ удовлетворяют условиям:

$$\alpha_1 \geqslant 1, \ \alpha_2 \geqslant 1, \dots, \ \alpha_g \geqslant 1.$$

Для существования характеристически невырожденного многообразия квадрик Q_p с характеристическими точками необходимо выполнение условий (2). Согласно (3), представим число p в виде:

11 Зак. 3728

$$p = S_1 \cdot (S_1^{\alpha_1-1} S_2^{\alpha_2} \dots S_g^{\alpha_g}).$$

Можем принять

$$h_1 = S_1,\ \ell_1 = S_1^{\alpha_1-1} S_2^{\alpha_2} \dots S_g^{\alpha_g},\ n_1 = \ell_1(h_1+1).$$

Заметим, что величины S_1 и $S_1^{\alpha_1-1} S_2^{\alpha_2} \dots S_g^{\alpha_g}$ являются различными делителями числа p. Если $S_1 \neq 2$ (следовательно, p -нечетное число), мы можем положить

$$h_2 = S_1^{\alpha_1-1} S_2^{\alpha_2} \dots S_g^{\alpha_g},\ \ell_2 = S_1,\ n_2 = \ell_2(h_2+1).$$

В этом случае $S_1 = \ell_2 \geqslant 3$. Если $\alpha_1 \geqslant 2$, то принимаем

$$h_3 = S_1^2,\ \ell_3 = S_1^{\alpha_1-2} S_2^{\alpha_2} \dots S_g^{\alpha_g},\ n_3 = \ell_3(h_3+1),$$

$$h_4 = S_1^{\alpha_1-2} S_2^{\alpha_2} \dots S_g^{\alpha_g},\ \ell_4 = S_1^2,\ n_4 = \ell_4(h_4+1).$$

Если $\alpha_1 < 2$ (а следовательно, $\alpha_1 = 1$), то

$$h_3 = S_2,\ \ell_3 = S_1 S_2^{\alpha_2-1} \dots S_g^{\alpha_g},\ n_3 = \ell_3(h_3+1),$$

$$h_4 = S_1 S_2^{\alpha_2-1} \dots S_g^{\alpha_g},\ h_4 = S_2,\ n_4 = \ell_4(h_4+1).$$

Данный процесс будем продолжать, пока не переберем всех различных делителей числа p. В результате будут найдены все параметры характеристически невырожденных многообразий квадрик Q_p с характеристическими точками. Легко видеть, что каждому делителю числа p соответствует одно многообразие. Кроме этих многообразий, существует еще многообразие с параметрами $h_{\mathcal{T}} = 1,\ \ell_{\mathcal{T}} = p,\ n_{\mathcal{T}} = 2p.$

Таким образом, если p -нечетное, то

$$\mathcal{T} = \tau + 1.$$

Пусть p -четно. В этом случае $S_1 = 2$ и можно положить

$$h_1 = S_1,\ \ell_1 = S_1^{\alpha_1-1} S_2^{\alpha_2} \dots S_g^{\alpha_g}.$$

Соотношение $\ell_1 = S_1 = 2$ противоречит условию (2) ($\ell \geqslant 3$). Дальнейший процесс выписывания параметров многообразия продолжим так же, как и в случае нечетного p. Следовательно, если p четно, то $\mathcal{T} = \tau$. Таким образом, теорема полностью доказана.

С л е д с т в и е. Если p -простое число, то не существует h -мерных ($h \geqslant 2$) характеристически невырожденных многообразий квадрик Q_p с характеристическими точками.

Действительно, согласно теореме 2, число $\mathcal{T}$ таких многообразий для простого p равно единице. Это одномерное многообразие $(1,1,2p)_p^2$. Следовательно, h -мерных невырожденных многообразий нет.

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 2, можно получить следующую теорему:

Т е о р е м а 3. Пусть натуральное число n ($n \geqslant 6$) является размерностью проективного пространства P_n. Тогда в этом пространстве существует лишь конечное число R характеристически невырожденных многообразий квадрик с характеристическими точками, причем

$$R = \begin{cases} \tau - 1, & \text{если } n \text{ - четное число} \\ \tau, & \text{если } n \text{ -нечетное число.} \end{cases}$$

Здесь τ число всевозможных различных делителей числа n, отличных от 1 и самого n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Худенко В.Н. О многообразиях многомерных квадрик в проективном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.8, Калининград, 1977, с.126-134.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

В.П.Цапенко

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ $(P,Q)_{2,2}$

В трехмерном проективном пространстве рассматривается конгруэнция $(P,Q)_{2,2}$ пар фигур P и Q, где P -точка, Q - невырожденная квадрика. Выделен класс $(P,Q)^*_{2,2}$, характеризующийся свойством ассоциированных с конгруэнцией $(PQ)_{2,2}$ квадрик, рассмотрены некоторые свойства конгруэнции $(P,Q)^*_{2,2}$.

§ I. КАНОНИЧЕСКИЙ РЕПЕР КОНГРУЭНЦИИ $(P,Q)_{2,2}$

Отнесем конгруэнцию $(P,Q)_{2,2}$ к реперу $R=\{\bar{A}_0,\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3\}$, в котором вершина A_0 помещена в точку P, вершины A_1 и A_2 принадлежат касательной плоскости к поверхности (A_0) в точке A_0 и являются точками пересечения поляры точки A_0 относительно коники C с этой коникой. (Коникой C названа линия пересечения касательной плоскости к поверхности (A_0) с квадрикой Q). В качестве вершины A_3 выбран полюс плоскости $A_0A_1A_2$ относительно квадрики Q.
Инфинитезимальные перемещения репера R определяются деривационными формулами:

$$d\bar{A}_\alpha=\omega_\alpha^\beta\bar{A}_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=0,1,2,3),$$