5) $\overset{2}{S}(\xi,\eta) = v\, S(\xi,\eta)$;

6) $dF(\xi,\eta) = 0$;

7) $\bar{d}F(\xi,\eta) = 0, \quad \forall \xi,\eta \in V$,

где dF ($\bar{d}F$) –внешний дифференциал F в связности ∇ ($\overset{2}{\nabla}$).

Доказательство. Для любых $X, Y \in T^1_0(M_n)$ имеем

$$dF(X,Y) = \nabla_X FY - \nabla_Y FX - F[X,Y], \tag{7}$$

$$\bar{d}F(X,Y) = \overset{2}{\nabla}_X FY - \overset{2}{\nabla}_Y FX - F[X,Y] = dF(X,Y) + \overset{2}{A}(X,FY) - \overset{2}{A}(Y,FX), \tag{8}$$

$$\overset{1}{A}(X,Y) - \overset{2}{A}(Y,X) = \nabla_X FY - \nabla_Y FX - F(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = dF(X,Y) - FS(X,Y), \tag{9}$$

$$\overset{2}{A}(X,Y) - \overset{2}{A}(Y,X) = -v(\nabla_X hY - \nabla_Y hX) - h(\nabla_X vY - \nabla_Y vX). \tag{10}$$

Утверждения теоремы следует из (3),(7)-(10).

Теорема 2. Следующие утверждения эквивалентны:

1) распределение H инволютивно;

2) $\overset{2}{A}(X,Y) - \overset{2}{A}(Y,X) = -vS(X,Y)$;

3) $\overset{2}{S}(X,Y) = h\, S(X,Y), \quad \forall X,Y \in H$.

Следствие 1. Если $S = 0$ и алгебра $\mathcal{U}(M_n, \overset{1}{A})$ коммутативна, то

1) распределение V инволютивно;

2) $\overset{1}{S} = 0$;

3) $\overset{2}{S}(\xi,\eta) = 0, \quad \forall \xi,\eta \in V$;

4) $dF(X,Y) = 0, \quad \forall X,Y \in T^1_0(M_n)$.

Следствие 2. Если $S = 0$ и алгебра $\mathcal{U}(M_n, \overset{2}{A})$ коммутативна, то

1) распределение H инволютивно; 2) $\overset{2}{S} = 0$; 3) распределение V инволютивно; 4) $\overset{1}{S}(\xi,\eta) = 0, \quad \forall \xi,\eta \in V$.

Библиографический список

1. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М.: Наука, 1971. 343с.

2. Waisman I. Sur quelques formules du calcul de Ricci

3. Nicolescu L., Martin M. Sur l'algebre assosiel á un champ tensorial de type (1.2) // Acta Math. Acad. Sci Hungarical. 1978. N31. P. 27-35.

УДК 514.76

НЕЖЕСТКИЕ ВЛОЖЕНИЯ И АВТОМОРФИЗМЫ КОМПЛЕКСНЫХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ

Р.Б.Чинак

(Омский политехнический ин-т)

Изучается строение группы биголоморфных автоморфизмов комплексного подмногообразия $i: N \hookrightarrow M$ в зависимости от свойств вложения i и кривизны объемлющего пространства M.

В дальнейшем символ TM означает голоморфное касательное расслоение многообразия M. Напомним, что инфинитезимальной голоморфной деформацией подмногообразия $N \subset M$ называется глобальное голоморфное сечение расслоения $TM|_N$ [1]. Через K_M обозначаем каноническое линейное расслоение, т.е. $K_M = \Lambda^n T^* M$, где $n = \dim_{\mathbb{C}} M > 0$.

Определение. Вложение $i: N \hookrightarrow M$ является нежестким, если $n = \dim_{\mathbb{C}} M > 0$ и существует $k = n-1$ всюду линейно-независимых голоморфных деформаций подмногообразия N в M.

Следующая теорема уточняет некоторые результаты работ [2,3].

Теорема. Пусть комплексное многообразие M допускает форму объема σ с неположительным тензором Риччи и $N \hookrightarrow M$ является нежестко вложенным компактным комплексным подмногообразием в M. Если при этом выполнено условие $C(N) \neq 0$, то группа $\mathrm{Aut}(N)$ дискретна.

Доказательство. Пусть $n = \dim_{\mathbb{C}} M > 0$ и χ – нетривиальное голоморфное векторное поле на многообразии N. Рассмотрим всюду линейно-независимые инфинитезимальные голоморфные деформации $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ подпространства $N \subset M$. Тогда $\eta = \gamma_1 \wedge \dots \wedge \gamma_{n-1} \wedge \chi \in H^0(N; \mathcal{O}(-K_M|_N))$.

Если $\eta \equiv 0$, то $\chi = \sum_i a_i \gamma_i$, где $a_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1, n-1}$. Значит, в силу соотношения $\chi \not\equiv 0$ векторное поле χ имеет пустое множество нулей. Поскольку компактное комплексное многообразие с голоморфным векторным полем без нулей обладает нулевым классом Чженя [2,с.159],то получаем противоречие с условием $C(N)\neq 0$.

Таким образом, $\eta\neq 0$. Заметим,что сужение $\sigma|_N$ будет послойной эрмитовой метрикой в $-K_M|_N$ неположительной кривизны. Следовательно,голоморфное сечение η параллельно относительно метрики $\sigma|_N$ [4,замечание 7] и поэтому χ всюду отлично от нуля. Остается использовать [2,с.159] (см.выше) и соотношение $C(N)\neq 0$.

Приведем пример,который показывает,что нежесткость вложения в теореме является существенной. Напомним,что поверхностью Ферма $S_d\subset \mathbb{CP}^{n+1}$ $(n>0)$ называется множество нулей однородного многочлена

$$\sum_{i=0}^{n+1}(z^i)^d$$

(здесь $\{z^i\}$ –однородные координаты).
Если $d>n+2$,то S_d –гладкая гиперповерхность с отрицательным каноническим пучком. Кроме того, S_d содержит рациональную кривую $N\cong\mathbb{CP}^1$ вида

$$z^0=u,\ z^1=\eta u,\ z^2=v,\ z^3=\eta v,\ z^4=0,\ \dots,\ z^{n+1}=0.$$

(η -корень d- й степени из -1). Поскольку $C(N)\neq 0$ и $C_1(S_d)<0$ (группа $\mathrm{Aut}(N)$ недискретна),то в силу доказанной выше теоремы вложение $N\hookrightarrow S_d$ является жестким.

Библиографический список

1. Siu Y.T. Complex-analytysity of harmonic maps, vanishing and Lefschetz theorems // J. diff. geom. 1982. V.17. P. 55-138.

2. К о б а я с и Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. Пер.с англ.М.:Наука,1986.224с.

3. Ч и н а к Р.Б. Автоморфизмы эрмитовых многообразий// Всесоюзная школа-сем.по компл.анализу:Тез.докл.Красноярск, 1987.С.127.

4. Kobayashi S., Wu H.-H. On holomorphic sections of certain hermitian vector bundles // Math. Ann. 1970. V.189. P. 1-4.

УДК 514.75

ОБ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧЕ ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ

Ю.И.Ш е в ч е н к о
(Калининградский ун-т)

Основная задача дифференциальной геометрии поверхности

проективного пространства по Г.Ф.Лаптеву и Н.М.Остиану состоит в построении оснащения Э.Картана.Если рассматривать поверхность как многообразие касательных плоскостей,то эту задачу необходимо переформулировать в пользу нормализации А.П.Нордена.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A,A_J\}$ $(J,\mathcal{J},K=\overline{1,n})$,деривационные формулы которого запишем в виде

$$dA=\theta A+\omega^J A_J,\quad dA_J=\theta A_J+\omega_J^{\mathcal{J}}A_{\mathcal{J}}+\omega_J A, \qquad (1)$$

где θ – некоторая 1-форма,а структурные формы $\omega^J,\omega^J_{\mathcal{J}},\omega_J$ проективной группы $GP(n)$,действующей в пространстве P_n ,удовлетворяют уравнениям Картана (см.,например, [1,с.173]):

$$\begin{cases} d\omega^J=\omega^{\mathcal{J}}\wedge\omega^J_{\mathcal{J}}, \qquad d\omega_J=\omega^{\mathcal{J}}_J\wedge\omega_{\mathcal{J}},\\ d\omega^J_{\mathcal{J}}=\omega^K_{\mathcal{J}}\wedge\omega^J_K+\omega_{\mathcal{J}}\wedge\omega^J+\delta^J_{\mathcal{J}}\,\omega_K\wedge\omega^K. \end{cases} \qquad (2)$$

В пространстве P_n рассмотрим локальную m-поверхность X_m $(0<m<n)$ как семейство центрированных касательных плоскостей T_m. Произведем разбиение значений индексов: $J=(i,a)$;

$$i,j,k=\overline{1,m};\qquad a,b,c=\overline{m+1,n}.$$

Репером нулевого порядка поверхности X_m является репер $\{A,A_i,A_a\}$,вершины A,A_i которого помещены на касательную плоскость T_m ,причем вершина A – в ее центр.Из формул (1) вытекает система дифференциальных уравнений поверхности X_m :

$$\omega^a=0,\qquad \omega^a_i=\Lambda^a_{ij}\omega^j. \qquad (3)$$

Продолжая эту систему,найдем

$$\nabla\Lambda^a_{ij}\equiv 0 \qquad (\Lambda^a_{ij}=\Lambda^a_{ji}), \qquad (4)$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^i, а дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla\Lambda^a_{ij}=d\Lambda^a_{ij}-\Lambda^a_{ik}\,\omega^k_j-\Lambda^a_{kj}\,\omega^k_i+\Lambda^b_{ij}\,\omega^a_b.$$

Коэффициенты Λ^a_{ij} в системе (3) образуют фундаментальный тензор 1-го порядка поверхности X_m ,представляемой как многообразие касательных плоскостей.

Из структурных уравнений (2) группы $GP(n)$ и дифференциальных уравнений (3) поверхности X_m вытекает,что с последней ассоциируется расслоение $G(X_m)$ со структурными уравнениями