ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

В.Н.Худенко

О ФОКАЛЬНЫХ ОБРАЗАХ МНОГООБРАЗИЙ МНОГОМЕРНЫХ КВАДРИК

В работе изучаются фокальные образы h-мерного многообразия $(h,h,n)^2_p$ p-мерных квадрик Q_p [3]. Введено понятие фокально-невырожденного многообразия многомерных квадрик. Показано, что фокальными точками обладает коника только фокально невырожденного многообразия $(n-1,n-1,n)^2_1$. Доказано, что число фокальных точек совпадает с числом функций, определяющих такое многообразие, и что каждая фокальная точка является сдвоенной.

Рассмотрим многообразие $(h,h,n)^2_p$ квадрик Q_p в n-мерном проективном пространстве, где

$$h < n .$$

Согласно результатам работы [3] уравнения квадрики Q_p и система дифференциальных уравнений многообразия $(h,h,n)^2_p$ записываются соответственно в виде:

$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \qquad x^a = 0, \quad \det(a_{\alpha\beta}) = 1, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \omega^{n+1}_{\xi} &= \Gamma^{n+1\, i}_{\xi}\, \omega_i , \\ \omega^{\hat a}_{\alpha} &= \Gamma^{\hat a i}_{\alpha}\, \omega_i , \\ \Theta_{\alpha\beta} &= \Gamma^{i}_{\alpha\beta}\, \omega_i , \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\omega_i \overset{\mathrm{def}}{=} \omega^{n+1}_i ,$$

$$\Theta_{\alpha\beta} = d a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\,\omega^\gamma_\beta - a_{\beta\gamma}\,\omega^\gamma_\alpha + \frac{2}{p+2}\, a_{\alpha\beta}\,\omega^\gamma_\gamma .$$

Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения:

$$\alpha,\beta,\gamma = 1,2,\dots,p+2 ;$$

$$i,j = 1,2,\dots,h ; \quad a = p+3,\ p+4,\dots,n+1 ;$$

$$\hat a = p+3,\ p+4,\dots,n ; \quad \xi = h+1,\ h+2,\dots,p+2 .$$

Фокальным многообразием квадрики Q_p принято называть множество точек квадрики Q_p, которые одновременно инцидентны смежной квадрике. Следовательно, система уравнений

$$\begin{aligned} & a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^a = 0, \\ & d\{a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta\} = 0, \quad dx^a = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

задает фокальное многообразие квадрики $Q_p \in (h,h,n)^2_p$.

Система (3) приводится к виду

$$\begin{aligned} & a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^a = 0, \\ & \Gamma^{i}_{\alpha\beta}\,\omega_i\, x^\alpha x^\beta = 0, \\ & \Gamma^{\hat a i}_{\alpha}\,\omega_i\, x^\alpha = 0, \quad (\Gamma^{i}_{\xi}\, x^\xi + x^i)\,\omega_i = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Теперь, по аналогии с классическими исследованиями в трехмерных пространствах (см. например, [1]), будем исключать независимые базисные формы ω_i из уравнений, содержащих эти формы.

О п р е д е л е н и е. Многообразия $(h,h,n)^2_p$ квадрик Q_p, для которых выполняются соотношения

$$\exists i_0 \le h, \quad \det(\Gamma^{i_0}_{\alpha\beta}) \ne 0;$$
$$\forall \hat{a} \le n, \ \forall i \le h, \quad \operatorname{rang}(\Gamma^{\hat{a}i}_{\alpha}) \ne 0; \qquad (5)$$
$$\operatorname{rang}(\Gamma^{i}_{\xi}) \ne 0,$$

называются фокально невырожденными многообразиями квадрик Q_p. В дальнейшем будем рассматривать лишь фокально-невырожденные многообразия.

Очевидно, что для исключения форм ω_i (при выполнении условий (5)) необходимо, чтобы число этих форм совпадало с числом уравнений, содержащих эти формы. Следовательно, приходим к равенству

$$n - p = h .$$

Если параметры n, p, h удовлетворяют равенству (6), то фокальное многообразие квадрики $Q_p \in (h,h,n)^2_p$ задается системой уравнений:

$$\det \begin{vmatrix} \Gamma^{i}_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta \\ \Gamma^{ai}_{\alpha}\, x^\alpha \\ \Gamma^{i}_{\xi}\, x^\xi + x^i \end{vmatrix} = 0, \qquad (7)$$
$$a_{\alpha\beta}\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^a = 0 .$$

Особый интерес представляет случай, когда фокальное многообразие имеет нулевую размерность, т.е. квадрика $Q_p \in (h,h,n)^2_p$ обладает фокальными точками. Тогда система (7) должна задавать алгебраическое многообразие нулевой размерности. Таким образом, мы придем к соотношению

$$p = 1 . \qquad (8)$$

Объединяя (6) и (8), получим

$$p = 1, \ h = n - 1 .$$

Следовательно, каждая коника Q_1 фокально-невырожденного многообразия $(n-1, n-1, n)^2_1$ обладает фокальными точками. Остается выяснить вопрос о числе этих точек. Очевидно, что степень первого уравнения системы (7) при выполнении условий (9) равна n. Следовательно, порядок алгебраического многообразия, определяемого системой (7), равен $2n$.

Таким образом доказана следующая теорема

Т е о р е м а 1. Каждая коника Q_1 фокально-невырожденного многообразия $(n-1, n-1, n)^2_1$ обладает $2n$ фокальными точками.

Заметим, что при $n = 3$ коника $Q_1 \in (2,2,3)^2_1$, по теореме 1, будет иметь шесть фокальных точек, что является известным фактом дифференциальной геометрии конгруэнций коник в P_3.

Если $n = 4$, то коника $Q_1 \in (3,3,4)^2_1$ имеет по теореме 1 восемь фокальных точек, что совпадает с результатами работ [2]-[3].

Имеет место следующая

Т е о р е м а 2. Число функций, определяющих фокальноневырожденное многообразие $(n-1, n-1, n)_1^2$ коник Q_1, совпадает с числом фокальных точек коники Q_1 этого многообразия.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теоремой 1 работы [3]. Имеем:

$$S_k = C^2_{p+2} + (p+2)(n-p-1) - k - 1 . \qquad (10)$$

Соотношение (10) приводится к виду

$$S_{n-1} = C_4^2 + 3(n-2) - (n-1) - 1 . \qquad (10')$$

Окончательно получим

$$S_{n-1} = 2n . \qquad (11)$$

В силу теоремы 1 S_{n-1} совпадает с числом фокальных точек коники Q_1 фокально-невырожденного многообразия $(n-1, n-1, n)_1^2$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Каждая из $2n$ фокальных точек коники Q_1 фокально-невырожденного многообразия $(n-1, n-1, n)_1^2$ является сдвоенной фокальной точкой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$p = 1 , \quad k = n-1 .$$

Рассмотрим систему (7), состоящую в данном случае из n уравнений. Первое уравнение системы (7) имеет степень n, второе-квадратичное, остальные-линейные уравнения.

Степень квадратичного уравнения не может понизиться, так как

$$\det(a_{\alpha\beta}) = 1 .$$

Следовательно, при каком-либо вырождении понизится лишь степень первого уравнения системы (7). Если степень первого уравнения понизится на единицу, то степень всей системы, а, следовательно, и число фокальных точек, будет равняться $2n-2$. При понижении степени первого уравнения на два, число фокальных точек будет $2n-4$ и так далее.

Таким образом, каждая фокальная точка является сдвоенной, что и требовалось доказать.

Список литературы

1. Ф и н и к о в С.П. Теория конгруэнций. М.-Л., ГИТТЛ, 1950.

2. Х у д е н к о В.Н. О многообразиях квадратичных элементов в n-мерном проективном пространстве.-"Liet. mat. rinkinys." "Литовский математический сборник", 1975, №2, с.148-149.

3. Х у д е н к о В.Н. О многообразиях многомерных квадрик проективного пространства.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.8, Калининград, 1977, с.126-134.