Список литературы

1. *Долгарев А.И.* Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств: Монография. Пенза, 2005.

A. Dolgarew, I. Dolgarew

THE FUNDAMENTAL EQUATIONS OF THE THEORY OF SURFACES OF ODULAR SPACE WITH DISSONE

Symbols of Christoffel and formulas of a Gauss — Peterson — Codazzi are defined. The total curvature of a surface of odular Galilean space with dissone does not concern to internal geometry of a surface.

УДК 514.7

И.А. Долгарев

(Пензенский государственный университет)

ПОВЕРХНОСТИ 3-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ГАЛИЛЕЯ, КОЭФФИЦИЕНТЫ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ФУНКЦИЯМИ ТОЛЬКО ВРЕМЕНИПОДОБНОГО ПАРАМЕТРА ИЛИ ТОЛЬКО ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНОГО ПАРАМЕТРА

Выявлены случаи порождаемости поверхности классического 3-мерного галилеева пространства-времени коэффициентом ее первой квадратичной формы, установлен вид таких поверхностей.

Существует несколько видов 3-мерных одулярных галилеевых пространств, определенных в аксиоматике Г. Вейля [1]. Среди них выделяется классическое галилеево пространство-время, в основе которого лежит галилеево векторное пространство; ниже оно называется пространством Галилея. Базис векторного пространства состоит из векторов $(\vec{e}, \vec{i}, \vec{j})$; векторы $(0, x^1, x^2)$ — евклидовы, векторы (x, x^1, x^2), $x \neq 0$, — галилеевы.

Регулярные поверхности 3-мерного пространства Галилея описаны в [1]. Поверхность, обладающая галилеевыми касательными векторами, задается в естественной параметризации векторной функцией

$$\gamma(t,u) = (t, x(t,u), y(t,u)),\ (t,u) \in D \subseteq E^2,$$

которая представляется в виде суммы

$$\gamma(t,u) = t\vec{e} + \vec{r}(t,u),\ (t,u) \in D \subseteq E^2. \qquad (1)$$

Здесь $t\vec{e}$ времениподобная составляющая поверхности $\gamma(t,u)$ и

$$\vec{r}(t,u) = (x(t,u), y(t,u)) \qquad (2)$$

пространственноподобная составляющая поверхности, это функция класса C^3, заданная на области **D** евклидовой плоскости $\mathbf{E}^2$ пространства-времени Галилея. Первая квадратичная форма поверхности (1), определяющая на ней метрику, согласно [1] есть

$ds^2 = dt^2$, если $t \neq 0$; $ds^2 = Edu^2$, если $t = 0$, $E = \vec{r}_u^{\,2} = x_u^{\,2} + y_u^{\,2}$;

вторая квадратичная форма поверхности такова:

$$II = Adu^2 + 2Bdudt + Cdt^2,\ A = \vec{r}_{uu}\vec{n},\ B = \vec{r}_{ut}\vec{n},\ C = \vec{r}_{tt}\vec{n};$$

единичный вектор нормали поверхности —

$$\vec{n} = \frac{1}{\left\|\vec{r}^{\,2}\right\|}(-y_u, x_u).$$

В [2] для поверхностей пространства Галилея доказана теорема Бонне об определяемости поверхности коэффициентами ее первой и второй квадратичных форм. Ниже рассмотрен случай определяемости поверхности коэффициентом только первой квадратичной формы.

Если (1) определяет поверхность вращения $\gamma(t,u) = t\vec{e} + (x(t)\cos u, x(t)\sin u)$, то коэффициенты ее квадратичных форм являются функциями только времениподобного параметра t. Рассматриваем поверхности (1), для которых

$$E = E(t) > 0,\ A = A(t),\ B = B(t),\ C = C(t). \qquad (3)$$

Для них выполняется

Теорема 1. *Коэффициенты второй квадратичной формы поверхности (1) со свойствами (3) являются функциями коэффициента E первой квадратичной формы.*

В [1] для поверхностей пространства Галилея найдены формулы Гаусса — Петерсона — Кодацци:

$$K = AC - B^2 = \frac{E_t^{\,2} - 2E_{tt}E}{4E^2},\ AE_t - BE_u = 2E(A_t - B_u), \qquad (4)$$
$$BE_t + 2E(B_t - C_u) = 0.$$

По выбору поверхности имеем $E_u = 0, B_u = 0, C_u = 0.$ Вторая и третья формулы в (4) принимают вид: $AE_t = 2EA_t$, $BE_t + 2EB_t = 0$, в иной записи $\frac{A_t}{A} = \frac{1}{2}\frac{E_t}{E}$, $\frac{B_t}{B} = -\frac{1}{2}\frac{E_t}{E}$. После интегрирования этих равенств получаем $\ln A = \frac{1}{2}\ln E + \ln p$, $\ln B = -\frac{1}{2}\ln E + \ln q$, где p, q постоянны; следовательно, $A = p\sqrt{E}$, $B = \frac{q}{\sqrt{E}}$. По формуле для кривизны поверхности имеем $C = \frac{K + B^2}{A}$, поэтому $C = \frac{E_t^{\,2} + 2E_{tt}E + 4qE^3}{4p\sqrt{E}E^2}$. #

Пусть поверхность (1) имеет коэффициенты (3). Она задается векторной функцией (2), и ее положение в пространстве Галилея определяется начальными условиями: пусть поверхность проходит через точку (t_0, u_0):

$$\vec{r}(t_0, u_0) = \vec{a},\ \vec{r}_u(t_0, u_0) = \vec{b},\ \vec{r}_t(t_0, u_0) = \vec{c}, \qquad (5)$$

где $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданные векторы, точка $(x(t_0, u_0), y(t_0, u_0))$ лежит в области D, векторы $\vec{b}, \vec{c}$ не коллинеарны, и $\|\vec{b}\| = \sqrt{E_0}$, где $E_0 = E(t_0)$.

Теорема 2. *Поверхность (1), коэффициенты квадратичных форм которой являются функциями только времениподобного параметра t (3), определяется коэффициентом $E = E(t) > 0$ первой квадратичной формы. Начальные условия (5) определяют единственную поверхность.*

Для получения поверхности нужно определить функцию (2). Так как $E = x_u^{\ 2} + y_u^{\ 2}$, то положим

$$x_u = \sqrt{E}\cos w\,,\ y_u = \sqrt{E}\sin w\,, \tag{6}$$

функцию $w = w(t,u)$ предстоит найти. Имеем единичный вектор нормали $\vec{n} = (-\sin w, \cos w)$. Продифференцируем функции (6) и запишем коэффициент A второй квадратичной формы: $x_{uu} = -\sqrt{E}w_u \sin w$, $y_{uu} = \sqrt{E}w_u \cos w$, $A = \vec{r}_{uu}\vec{n} = w_u\sqrt{E}$, откуда, согласно доказательству теоремы 1, $w_u = \dfrac{A}{\sqrt{E}} = p$. Аналогично $w_u = \dfrac{B}{\sqrt{E}} = \dfrac{q}{E}$. Теперь функция w является решением уравнения с полным дифференциалом $w_t dt + w_u du = 0$, именно $w = pu + k_1(t)$, где $k_1(t) = \int \dfrac{q}{E}dt$. Заданный вектор $\vec{b}$ в (5) определяет функцию $k_1(t)$ однозначно. Интегрируем функции (6):

$$\begin{aligned} x &= \int x_u du = \frac{\sqrt{E}}{p}\sin w + k_2(t)\,, \\ y &= \int y_u du = -\frac{\sqrt{E}}{p}\cos w + k_3(t)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Функции $k_2(t), k_3(t)$ однозначно определяются вектором $\vec{a}$ из (4). Мы получили функцию, описывающую поверхность:

$$\gamma(t,u) = (t, \frac{E}{A}\sin w + k_2(t), -\frac{E}{A}\cos w + k_3(t))\,,$$

$$w = \frac{A}{\sqrt{E}}u + \int B\sqrt{E}dt\,;$$

здесь функция (2) задана компонентами (7).

Легко проверяется, что полученная поверхность с компонентами (7) имеет коэффициентами своих квадратичных форм заданные функции (3). Очевидно, что коэффициент E первой квадратичной формы совпадает с заданным (см. (6)). Выше в результате дифференцирования функций (6) получено: $A = w_u\sqrt{E} = p\sqrt{e}$; аналогично $B = \frac{q}{\sqrt{E}}$. С учетом теоремы 1 это заданные функции (3).

Случай $p = 0$ выделяет из поверхностей со свойствами (3) особый случай. Выполняется

Теорема 3. *Если в (3)* $A = 0$*, то полученная поверхность* $\gamma(t,u)$ *является линейчатой.*

В частности, при $w_u = \frac{A}{\sqrt{E}} = p = 0$ (см. доказательство теоремы 2) имеем $A = 0$. Тогда $w = k_1(t) = \int B\sqrt{E}dt$ функция только параметра t. Поэтому $x = u\sqrt{E}\cos w + k_2(t)$, $y = u\sqrt{E}\sin w + k_3(t)$, и мы получаем поверхность

$$\gamma(t,u) = t\vec{e} + (u\sqrt{E}\cos w, u\sqrt{E}\sin w) + (k_2(t), k_3(t)),$$

являющуюся линейчатой.

Рассмотрим поверхность (1), для которой

$$E = E(u) > 0,\ A = A(u),\ B = B(u),\ C = C(u). \qquad (8)$$

Теорема 4. *Коэффициенты второй квадратичной формы поверхности со свойствами (8) являются функциями коэффициента* E *первой квадратичной формы.*

В формулах (4) имеем $E_t = 0, A_t = 0, B_t = 0$, поэтому $BE_u = 2EB_u$ и $2EC_u = 0$. Следовательно, $B = q\sqrt{E}, q = const$ и $C = const$. По формуле Гаусса $K = AC - B^2 = 0$, откуда $A = \frac{q^2}{C}E$.

Теорема 5. *Поверхность, коэффициенты квадратичных форм которой являются функциями только пространственноподобного параметра* u*, имеет нулевую кривизну, определяется только коэффициентом* E *первой квадратичной формы и задается векторной функцией, распадающейся на два слагаемых — одно из них есть линейная функция только времениподобного параметра* t*, другое — только пространственноподобного параметра* u*:*

$$\gamma(t,u) = t\vec{e} + (gt + g_1, ht + h_1) + \vec{r}(u).$$

Как и выше в доказательстве теоремы 2, вводим обозначения (6) и находим $w_u = \frac{A}{\sqrt{E}}$. Согласно доказательству теоремы 4 $w_u = \frac{q^2}{C}\sqrt{E}$. Аналогично получаем $w_t = q$. Следовательно, $w = qt + \frac{q^2}{C}\int\sqrt{E}du$. Имеем

$$x = \int x_u du = f_1(u) + k_2(t), \; y = f_2(u) + k_3(t), \tag{9}$$

где через $f_1(u), f_2(u)$ обозначены интегралы функций $\sqrt{E}\cos w$, $\sqrt{E}\sin w$ и $k_2(t), k_3(t)$ — постоянные при интегрировании по параметру u. Дифференцируя дважды функции (9) по параметру t и используя вектор $\vec{n} = (-\sin w, \cos w)$, имеем $C = -k_2''\sin w + k_3''\cos w = 0$, что означает $k_2'' = 0, k_3'' = 0$, откуда $k_2 = gt + g_1$, $k_3 = ht + h_1$. Получаем функцию $\gamma(t,u)$ при начальных условиях $\vec{r}(t_0,u_0) = \vec{a}$, $\vec{r}_u(t_0,u_0) = \vec{b}$, векторы $\vec{b},\vec{c}$ не коллинеарны и $\|\vec{b}\| = \sqrt{E_0}$. #

Список литературы

1. *Долгарев А. И.* Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств: Монография. Пенза, 2005.

2. *Долгарев И. А.* Нахождение поверхности в 3-мерном пространстве Галилея по ее квадратичным формам // Изв. вузов. Поволжский регион. Сер. Естественные науки. 2006. №6(27). С. 68—74.

I. Dolgarew

THE SURFACES OF SPACE OF THE GALILEI OF DIMENSION 3, FACTORS OF WHICH SQUARE-LAW FORMS ARE FUNCTIONS ONLY OF PARAMETER OF TIME OR ONLY SPATIALLY OF SIMILAR PARAMETER

The cases of existence of a surface of classical 3D-space of Galilean space-time of factor of its first square-law form are detected, the aspect of such surfaces is established.

УДК 514.75

Н. А. Елисеева

(Калининградский государственный технический университет)

ИЗУЧЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ, ИНДУЦИРУЕМЫХ В РАССЛОЕНИИ НОРМАЛЕЙ ПЕРВОГО РОДА НА Λ-ПОДРАССЛОЕНИИ Н(П)-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Статья является продолжением работы [1]. Для нормальных связностей, индуцируемых на оснащенном в смысле Нордена — Картана Λ-подрасслоении, найдены условия совпадения и вырождения в одну связность.

В работе используется следующая система индексов:

$K=\overline{1,n}$; $p,q,s,t=\overline{1,r}$; $u,v,w=\overline{r+1,n-1}$; $\hat{u},\,\hat{v}=\overline{r+1,n}$; $\Phi=0,1$; $\Psi=\overline{0,11}$.