

Список литературы

1. Малаховский Н. В. Компьютерное моделирование исследования дифференцируемых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразия фигур. Калининград, 2006. Вып. 37.
2. Малаховский В. С. Теория конгруэнций кривых и поверхностей второго порядка в трехмерном проективном пространстве. Калининград, 1996.
3. Малаховский В. С. Введение в теорию внешних форм. Калининград, 1976. Ч. 1.

V. Malakhovsky, E. Jurova

Congruences of ruled quadrics with two double focal surfaces

In three-dimensional projective space P_3 two-parametric families (congruences) V_2 of ruled non-degenerates quadrics Q are investigated. It is proved that such congruences exist and with arbitrariness of five arbitrariness functions of two arguments are defined. Using computer-program [1] four sub-classes of such congruences are considered. If points A_1 and A_2 of intersection of lines A_0A_1 , A_3A_1 and A_0A_2 , A_3A_2 of quadric $Q \in V$ are also focal points than (A_0) and (A_3) are double focal surfaces it is established.

УДК 593.3

Т. И. Некипелова, В. Б. Цыренова

Бурятский государственный университет, г. Улан-Удэ

Упругое взаимодействие цилиндра

Вычисляются максимальные локальные напряжения, возникающие в зоне контакта цилиндра с жестким элементом. Начальное решение производится в перемещениях. Для решения задачи используется равномерная сетка по каждому из трех координатных направлений.

Ключевые слова: контактное воздействие, упругие перемещения точек, обобщенный закон Гука, касательные и нормальные напряжения, метод простой итерации, центральная аппроксимация.

Рассмотрим полый цилиндр следующих размеров: $r_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ — внешний радиус цилиндра, $r_2 = \frac{3}{5} r_1 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ — внутренний радиус цилиндра, $h = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ — высота цилиндра, $\nu = 0.3$ — коэффициент Пуассона, $E = 21 \cdot 10^{10} \text{ Па}$. На одно из оснований цилиндра окажем внешнее воздействие, заданное осевым смещением $w_0 = 10^{-6} \text{ м}$. Найдем максимальные напряжения, возникающие в зоне контакта.

Рассмотрим уравнения равновесия в перемещениях в цилиндрической системе координат:

$$\nabla^2 u + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r(1-2\nu)} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} + \frac{\rho}{G} f_\varphi = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 v - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r(1-2\nu)} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\rho}{G} f_r = 0, \quad (2)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\rho}{G} f_z = 0, \quad (3)$$

где u, v, w — окружное, радиальное и осевое смещения; r, φ, z — цилиндрические координаты; ρ — плотность среды; f_r, f_φ, f_z — проекции массовой силы на оси выбранной системы координат; $G = E/(2(1+\nu))$ — модуль упругости при сдвиге; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга;

$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа;

$\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial(vr)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z}$ — объемная деформация. Рассмотрим случай $f_r = f_\varphi = f_z = 0$. В уравнениях (1—3) подставим

Θ , раскроем оператор ∇^2 . Умножив каждое из уравнений (1—3) на r^2 и применив центральную аппроксимацию, получим следующие уравнения в перемещениях:

$$\begin{aligned}
& r(i)(u(i+1, j, k) - u(i-1, j, k)) / (2h_1) + \\
& + r^2(i)(u(i+1, j, k) - 2u(i, j, k) + u(i-1, j, k)) / h_1^2 + \\
& + (2 - 2\nu)(u(i, j+1, k) - 2u(i, j, k) + \\
& + u(i, j-1, k)) / (h_2^2(1 - 2\nu)) + r^2(i)(u(i, j, k+1) - \\
& - 2u(i, j, k) + u(i, j, k-1)) / h_3^2 - \\
& - u(i, j, k) + au(i, j, k) = 0;
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
& r^2(i)(2 - 2\nu)(v(i+1, j, k) - 2v(i, j, k) + \\
& + v(i-1, j, k)) / (h_1^2(1 - 2\nu)) + (v(i, j+1, k) - 2v(i, j, k) + \\
& + v(i, j-1, k)) / h_2^2 + r^2(i)(v(i, j, k+1) - \\
& - 2v(i, j, k) + v(i, j, k-1)) / h_3^2 +
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
& + r(i)(2 - 2\nu)(v(i+1, j, k) - v(i-1, j, k)) / (h_1(1 - 2\nu)) - \\
& - (2 - 2\nu)(v(i, j, k) + av(i, j, k)) / (1 - 2\nu) = 0; \\
& r^2(i)(w(i+1, j, k) - 2w(i, j, k) + w(i-1, j, k)) / h_1^2 + \\
& + (w(i, j+1, k) - 2w(i, j, k) + w(i, j-1, k)) / h_2^2 + \\
& + r^2(i)(2 - 2\nu)(w(i, j, k+1) - 2w(i, j, k) + \\
& + w(i, j, k-1)) / (h_3^2(1 - 2\nu)) + r(i)(w(i+1, j, k) - \\
& - w(i-1, j, k)) / (2h_1) + aw(i, j, k) = 0;
\end{aligned} \tag{6}$$

где h_1, h_2, h_3 — шаги сетки соответственно по r, φ, z ,

$$\begin{aligned}
& au(i, j, k) = ((3 - 4\nu)(v(i, j+1, k) - v(i, j-1, k)) / (2h_1) + \\
& + r(i)(v(i+1, j+1, k) - v(i+1, j-1, k) - \\
& - v(i-1, j+1, k) + v(i-1, j-1, k)) / (4h_1h_2) + \\
& + r(i)(w(i, j+1, k+1) - w(i, j+1, k-1) - \\
& - w(i, j-1, k+1) + w(i, j-1, k-1)) / (4h_2h_3)) / (1 - 2\nu); \\
& av(i, j, k) = (r(i)(u(i+1, j+1, k) - u(i+1, j-1, k) - \\
& - u(i-1, j+1, k) + u(i-1, j-1, k)) / (4h_1h_2) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + r^2(i)(w(i+1, j, k+1) - w(i+1, j, k-1) - \\
 & - w(i-1, j, k+1) + w(i-1, j, k-1))/(4h_1h_3) - \\
 & - (3-4\nu)(u(i, j+1, k) - u(i, j-1, k))/(2h_2)/(1-2\nu), \\
 aw(i, j, k) = & (r(i)(v(i, j, k+1) - v(i, j, k-1))/2h_3 + \\
 & + r^2(i)(v(i+1, j, k+1) - v(i+1, j, k-1) - \\
 & - v(i-1, j, k+1) + v(i-1, j, k-1))/(4h_1h_3) + \\
 & + r(i)(u(i, j+1, k+1) - u(i, j+1, k-1) - \\
 & - u(i, j-1, k+1) + u(i, j-1, k-1))/(4h_2h_3))/(1-2\nu).
 \end{aligned}$$

Из соотношений (4—6) найдем $u(i, j, k)$, $v(i, j, k)$, $w(i, j, k)$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 t_1(i, j, k) = & \frac{2r^2(i) + h_1r(i)}{2h_1^2}u(i+1, j, k) + \\
 & + \frac{2r^2(i) - h_1r(i)}{2h_1^2}u(i-1, j, k) + \\
 & + \frac{2-2\nu}{1-2\nu} \frac{1}{h_2^2}(u(i, j+1, k) + u(i, j-1, k)) + \\
 & + \frac{r^2(i)}{h_3^2}(u(i, j, k+1) + u(i, j, k-1)) + au(i, j, k), \\
 q_1(i, j, k) = & 1 + \frac{r(i)}{2h_1} + \frac{2r^2(i)}{h_1^2} + \frac{2(2-2\nu)}{(1-2\nu)h_2^2} + \frac{2r^2(i)}{h_3^2}, \\
 t_2(i, j, k) = & \frac{(2-2\nu)r(i)}{2(1-2\nu)h_1^2}((2r(i) + h_1)v(i+1, j, k) + \\
 & + (2r(i) - h_1)v(i-1, j, k)) + \\
 & + \frac{v(i, j+1, k) + v(i, j-1, k)}{h_2^2} + \\
 & + \frac{r^2(i)(v(i, j, k+1) + v(i, j, k-1))}{h_3^2} + av(i, j, k),
 \end{aligned}$$

$$q_2(i, j, k) = \frac{2(2-2\nu)r^2(i)}{(1-2\nu)h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} + \frac{2r^2(i)}{h_3^2} + \frac{2-2\nu}{1-2\nu},$$

$$t_3(i, j, k) = \frac{r(i)}{2h_1^2} \times$$

$$\times ((2r(i) + h_1)w(i+1, j, k) + (2r(i) - h_1)w(i-1, j, k)) +$$

$$+ \frac{w(i, j+1, k) + w(i, j-1, k)}{h_2^2} + \frac{(2-2\nu)r^2(i)}{(1-2\nu)h_3^2}) \times$$

$$\times (w(i, j, k+1) + w(i, j, k-1)) + aw(i, j, k),$$

$$q_3(i, j, k) = \frac{2r^2(i)}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2} + \frac{2(2-2\nu)r^2(i)}{(1-2\nu)h_3^2}.$$

Запишем формулы для определения значений перемещений во внутренних точках:

$$u(i, j, k) = \frac{t_1(i, j, k)}{q_1(i, j, k)}, v(i, j, k) = \frac{t_2(i, j, k)}{q_2(i, j, k)}, \quad (7)$$

$$w(i, j, k) = \frac{t_3(i, j, k)}{q_3(i, j, k)}.$$

Зададим начальные граничные условия. Для точек верхнего основания $u = 0, v = 0, w = w_0$. Для других граничных точек цилиндра $u = 0, v = 0, w = 0$. Пусть

$$i = \overline{0, c_1}, \quad j = \overline{0, c_2}, \quad k = \overline{0, c_3},$$

где c_1, c_2, c_3 — число делений соответственно по радиусу, окружности и оси цилиндра. Приведем формулы, позволяющие производить итерационный перерасчет значений u, v, w для поверхностных точек цилиндра. Для точек верхнего основания

$$u(i, j, c_3) = u(i, j, c_3 - 1), v(i, j, c_3) = v(i, j, c_3 - 1),$$

$$w(i, j, c_3) = w_0.$$

Для точек внутренней боковой поверхности

$$\begin{aligned} u(0, j, k) &= \\ &= (r(0)u(1, j, k) + (r(1) - r(0))(v(0, j + 1, k) - \\ &- v(0, j - 1, k))/(2h_2))/r(1), v(0, j, k) = v(1, j, k), \\ w(0, j, k) &= w(1, j, k) + \\ &+ ((r(1) - r(0))v(0, j, k + 1) - v(0, j, k - 1))/(2h_3). \end{aligned}$$

Для точек внешней боковой поверхности:

$$\begin{aligned} u(c_1, j, k) &= (r(c_1)u(c_1 - 1, j, k) + (r(c_1) - r(c_1 - 1)) \times \\ &\times (r(c_1) - r(c_1 - 1))(v(c_1, j + 1, k) - \\ &- v(c_1, j - 1, k))/(2h_2))/r(c_1 - 1), \\ v(c_1, j, k) &= v(c_1 - 1, j, k), \\ w(c_1, j, k) &= w(c_1 - 1, j, k) - \\ &- ((r(c_1) - r(c_1 - 1))v(c_1, j, k + 1) - v(c_1, j, k - 1))/(2h_3). \end{aligned}$$

Для точек нижнего основания:

$$u(i, j, 0) = u(i, j, 1), \quad v(i, j, 0) = v(i, j, 1), \quad w(i, j, 0) = w(i, j, 1).$$

Для внутренних точек цилиндра итерационный перерасчет производится по формулам (7). Условие периодичности выражено следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} u(i, c2, k) &= u(i, 0, k), \quad v(i, c2, k) = v(i, 0, k), \\ w(i, c2, k) &= w(i, 0, k). \end{aligned}$$

Получив числовые массивы окружного, радиального и осевого смещений u, v, w , найдем числовые массивы напряжений из обобщенного закона Гука $\sigma_{i,j} = \lambda \delta_{i,j} \varepsilon_{k,k} + 2\mu \varepsilon_{i,j}$. Максимальные напряжения в зоне контакта: $\max(\sigma_{r,r}) = 124,797$; $\max(\sigma_{\varphi,\varphi}) = 263,156$; $\max(\sigma_{z,z}) = 112,781$. На рисунках 1—3 представлены напряжения соответственно $\sigma_{r,r}$, $\sigma_{\varphi,\varphi}$, $\sigma_{z,z}$ и их осевые сечения в зоне контакта.

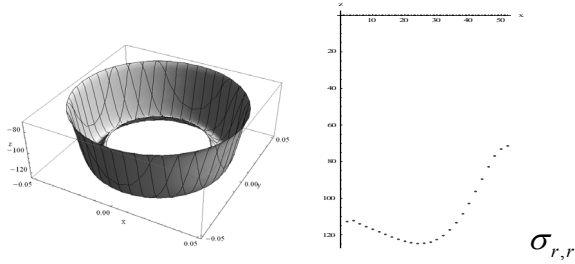


Рис. 1

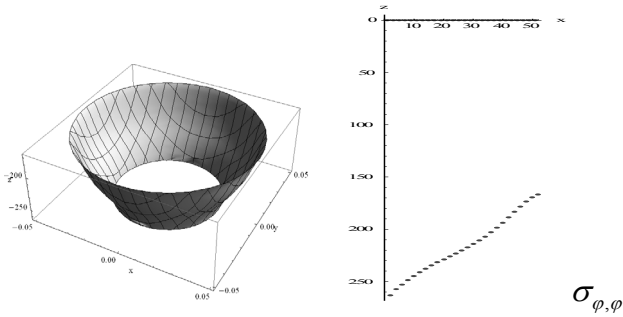


Рис. 2

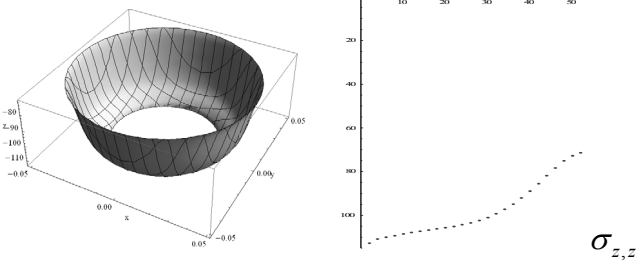


Рис. 3

Список литературы

1. Демидов С. П. Теория упругости. М., 1979.
2. Бубенчиков А. М., Бубенчиков М. А., Некипелова Т. И. и др. Контактное воздействие жесткого элемента на упругое тело цилиндрической формы // Вестн. Томск. гос. ун-та. Сер. «Матем. и мех.». 2012. №3. С. 41—48.

T. Nekipelova, V. Tsyrenova

Elastic interaction of cylinder

In the work we compute the maximum local stresses in the contact zone of the cylinder with a rigid element. The initial decision is made in terms of displacements. To solve the problem, we use a uniform grid on each of three axis directions.

УДК 514.76

К. В. Полякова

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Двойственные методы исследования дифференциально-геометрических структур

Продолжается исследование многообразия, проводимое ковариантным методом в работе [7] и опирающееся на дери-
вационные формулы и структурные уравнения.

Ключевые слова: дери-
вационная формула, структурные уравне-
ния, пфаффовы производные, скобка Ли, тангенциальнозначные
формы.

1. Базисные и слоевые координаты на многообразии.
Рассмотрим m -мерное гладкое многообразие X_m , некоторую
окрестность, в которой текущая точка определяется локаль-
ными координатами x^i и линейно независимые 1-формы [5]
 $\omega^i = x_j^i dx^j$ ($i, j, k = \overline{1, m}$). Требование линейной независимости
форм ω^i равносильно условию $\det(x_j^i) \neq 0$. Система $\omega^i = x_j^i dx^j$