$$\left.\begin{aligned} &2x^1x^3+(\sqrt{2}a+2)x^1x^4+(a+\sqrt{2})x^3x^4+\frac{\sqrt{2}}{2}(x^3)^2- \\ &\quad -(\sqrt{2}\beta-\frac{a}{2})(x^4)^2+\sqrt{2}(x^1)^2=0, \\ &x^1-x^2=0. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} &2x^1x^3+(\sqrt{2}a+2)x^1x^4+(a+\sqrt{2})x^3x^4+\frac{\sqrt{2}}{2}(x^3)^2- \\ &\quad -(\sqrt{2}\beta-\frac{a}{2})(x^4)^2+\sqrt{2}(x^1)^2=0, \\ &x^1+x^2+(a+\sqrt{2})x^4+\sqrt{2}x^3=0. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Фокальное многообразие конгруэнции квадрик Ли (Q) состоит из восьми точек, причем точка F является сдвоенной фокальной точкой.

С конгруэнцией $\mathcal{L}_1$ ассоциируется конгруэнция коник (C_1). Коника C_1 получается при пересечении квадрики Ли плоскостью $x^3=0$, ее уравнение имеет вид:

$$(x^4)^2-4x^1x^2=0, \quad x^3=0. \quad (7)$$

Найдены все шесть фокусов коники C_1, четыре из них имеют следующую геометрическую характеристику-это точки A_1, A_2 и точки $\mathcal{D}_1=A_1+A_2+2A_4$, $\mathcal{D}_2=A_1+A_2-2A_4$, которые являются точками пересечения коники (7) и прямой $E_{12}A_4$.

Список литературы

1. Р ы ж к о в В.В. О конгруэнциях плоских алгебраических кривых.-ДАН СССР, 1943, т.41, №5, с.202-204.

2. Ф и н и к о в С.П. Асимптотически-сопряженные двойные линии Ермолаева."Уч. зап. МГПИ", 1956, 16, вып.3.

3. Ф и н и к о в С.П. Теория пар конгруэнций, М., ГИТТЛ, 1956.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

Е.В. С к р ы д л о в а

О ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЯХ, ПОРОЖДЕННЫХ КОНИКОЙ И ПРЯМОЙ

В работе [1] рассмотрен наиболее общий тип конгруэнций $(CL)_{1,2}$ -вырожденных конгруэнций [2] пар фигур, порожденных коникой C, описывающей однопараметрическое семейство, и прямой L, описывающей конгруэнцию (L). В настоящей работе, дополняющей предыдущую, в трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается особый тип конгруэнций $(CL)_{1,2}$, в которых образующие элементы C и L пересекаются, не будучи, однако, инцидентными одной и той же плоскости. Конгруэнции $(CL)_{1,2}$ такого типа мы будем обозначать $(CL)^*_{1,2}$. Для конгруэнций $(CL)^*_{1,2}$ построен геометрически фиксированный репер, указаны их некоторые свойства.

§1. Система уравнений конгруэнции $(CL)^*_{1,2}$

В конгруэнциях $(CL)^*_{1,2}$ каждой прямой L конгруэнции (L) ставится в соответствие единственная пересекаемая ею коника C однопараметрического семейства (C), полным прообразом которой является линейчатая поверхность $(L)_C$. Отнесем конгруэнцию $(CL)^*_{1,2}$ к реперу $R=\{A_\alpha\}$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3,4)$, в котором вершина A_3 совпадает с точкой пересечения коники C и прямой L, вершины A_1 и A_2 расположены в точках пересечения коники C с характеристикой ее плоскости и A_4 -произвольная точка луча L, не инцидентная плоскости коники.

Деривационные формулы репера запишем в виде

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \tag{1.1}$$

где ω_α^β -формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{1.2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 + \omega_4^4 = 0. \tag{1.3}$$

Уравнения коники C относительно репера R с учетом соответствующей нормировки вершин запишутся в виде

$$x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3 = 0, \quad x^4 = 0 \tag{1.4}$$

Так как прямая L описывает конгруэнцию, то

$$\operatorname{rang}(\omega_3^1, \omega_3^2, \omega_4^1, \omega_4^2) = 2. \tag{1.5}$$

Не умаляя общности можно считать, что формы ω_3^1 и ω_3^2 линейно независимы и принять их в качестве базисных форм конгруэнции $(CL)^*_{1,2}$:

$$\omega_3^i \overset{def}{=} \omega^i \quad (i, j, k = 1, 2). \tag{1.6}$$

Из условия совпадения характеристики плоскости коники C с прямой A_1A_2 будем иметь

$$\omega_1^4 = \omega_2^4 = 0, \quad \omega_3^4 \neq 0 \tag{1.7}$$

Учитывая соотношения (1.6), (1.7), систему пфаффовых уравнений конгруэнции $(CL)^*_{1,2}$ можно записать в виде:

$$\omega_i^j = \Gamma_i^j \omega_3^4, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^3 \omega_3^4, \quad \omega_3^4 = \Gamma(\omega^1 + \omega^2),$$
$$\omega_i^4 = 0, \quad \omega_4^i = \Gamma_{4k}^i \omega^k, \quad \omega_i^i - \omega_3^3 = \Gamma^i \omega_3^4 + \omega^i. \tag{1.8}$$

Здесь и далее суммирование по индексам i, j не производится и $i \neq j$.

Исследуя систему (1.8), убеждаемся, что конгруэнции $(CL)^*_{1,2}$ существуют и определяются с произволом двух функций двух аргументов.

Т е о р е м а 1. Торсы прямолинейной конгруэнции (L) тогда и только тогда высекают на поверхности (A_3) координатную сеть, когда характеристические точки граней $(A_iA_3A_4)$ инцидентны прямой L.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Торсы прямолинейной конгруэнции (L) определяются уравнением

$$(\omega^1)^2 \Gamma_{41}^2 + \omega^1\omega^2(\Gamma_{42}^2 - \Gamma_{41}^1) - (\omega^2)^2 \Gamma_{42}^1 = 0. \tag{1.9}$$

На поверхности (A_3) они тогда и только тогда высекут координатную сеть, когда

$$\Gamma_{41}^2 = \Gamma_{42}^1 = 0. \tag{1.10}$$

Характеристическая точка M_i грани $(A_jA_3A_4)$ определяется формулой

$$M_i = \Gamma_{4j}^i A_j + \Gamma_j^i \Gamma(\Gamma_{4i}^i - \Gamma_{4j}^i)A_3 - \Gamma_j^i \Gamma A_4. \tag{1.11}$$

Очевидно, условия (1.10) необходимы и достаточны для того, чтобы точки M_1 и M_2 были инцидентны прямой L.

Класс конгруэнций $(CL)^*_{1,2}$ с рассмотренными свойствами существует и определяется с произволом девяти функций одного аргумента. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. Линейчая поверхность $(L)_C$ тогда и только тогда будет являться развертывающейся, когда прямые A_1M_2 и A_2M_1 пересекаются.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для того, чтобы прямые A_1M_2 и A_2M_1 пересекались, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\Gamma^2_{42}-\Gamma^2_{41}=\Gamma^1_{41}-\Gamma^1_{42}. \tag{1.12}$$

В силу равенства (1.12) уравнение (1.9) торсов конгруэнции (L) примет вид

$$(\omega^1+\omega^2)(\Gamma^2_{41}\omega^1-\Gamma^1_{42}\omega^2)=0 \tag{1.13}$$

Так как уравнение

$$\omega^4_3=\Gamma(\omega^1+\omega^2)=0$$

выделяет из конгруэнции (L) линейчатую поверхность $(L)_C$, то поверхность $(L)_C$ в этом случае является торсом. Класс конгруэнций $(CL)^*_{1,2}$, обладающих указанными свойствами, существует и определяется с произволом одной функции двух аргументов. Теорема доказана.

Завершим геометрическую фиксацию репера: вершину A_4 поместим в точку прямой L, которая вместе с A_3 гармонически разделяет фокальные точки этой прямой. Если конгруэнция (L) параболическая, то вершину A_4 совместим с фокусом ее луча. В результате фиксации репера будем иметь

$$\omega^i_4=(-1)^j a\omega^i+\Gamma^i_{4j}\omega^j, \quad \omega^3_4=\Gamma^3_{4k}\omega^k. \tag{1.15}$$

§ 2. Конгруэнция $(CL)^{*Q}_{1,2}$

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $(CL)^{*Q}_{1,2}$ называется конгруэнция $(CL)^*_{1,2}$, у которой плоскости коник C образуют пучок, а сами коники инцидентны одной и той же неподвижной квадрике

$$Q\equiv 2x^1x^2+2x^1x^3+2x^2x^3+2a_{34}x^3x^4+a_{44}(x^4)^2=0. \tag{2.1}$$

Т е о р е м а 3. Конгруэнция $(CL)^{*Q}_{1,2}$ существует и определяется с произволом одной функции одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие неподвижности квадрики (2.1)

$$dQ=(2\Theta-\omega^1_1-\omega^2_2-\omega^3_1-\omega^3_2)\,Q \tag{2.2}$$

эквивалентно следующей системе равенств:

$$\omega^j_i+\omega^3_i=0, \tag{2.3}$$

$$\omega^1+\omega^2+a_{34}\omega^4_3=0, \tag{2.4}$$

$$\omega^i_i-\omega^3_3-\omega^i-\omega^i_j+\omega^3_i+\omega^3_j=0, \tag{2.5}$$

$$a_{34}\omega^3_i+\omega^j_4+\omega^3_4=0, \tag{2.6}$$

$$da_{34}+a_{34}(\omega^1_1+\omega^2_2-\omega^3_3-\omega^4_4)+a_{34}(\omega^3_1+\omega^3_2)-$$
$$-a_{44}\omega^4_3-\omega^1_4-\omega^2_4=0, \tag{2.7}$$

$$da_{44}+a_{44}(\omega^1_1+\omega^2_2-2\omega^4_4)+a_{44}(\omega^3_1+\omega^3_2)-2a_{34}\omega^3_4=0. \tag{2.8}$$

Так как плоскости коник C образуют пучок, то

$$\omega_1^3 = \omega_2^3 = 0 . \qquad (2.9)$$

Из уравнений (2.3), (2.5) и (2.6) тогда будем иметь

$$\omega_i^j = 0 , \quad \omega_i^i - \omega_3^3 = \omega^i ,$$

$$\omega_4^1 = \omega_4^2 = - \omega_4^3 . \qquad (2.10)$$

Сравнивая уравнения (1.15) и (2.10), получим

$$\omega_4^1 = a\,(\omega^1 - \omega^2) . \qquad (2.11)$$

Равенство (2.4) эквивалентно конечному соотношению

$$1 + a_{34}\Gamma = 0 . \qquad (2.12)$$

Завершим нормировку вершин репера так, чтобы

$$\Gamma = 1 . \qquad (2.13)$$

При этом единичные точки прямых A_1A_4 и A_2A_4 будут инцидентны касательной плоскости к поверхности (A_3).

Продолжая уравнение

$$\omega_3^4 = \omega^1 + \omega^2 , \qquad (2.14)$$

получим

$$\omega_3^3 - \omega_4^4 + \omega_4^1 + \omega_4^2 = \varphi\, \omega_3^4 . \qquad (2.15)$$

Используя равенства (2.7), (2.12), (2.13), находим

$$\varphi = - a_{44} - 1 . \qquad (2.16)$$

Окончательно система пфаффовых уравнений конгруэнции $(CL)_{1,2}^{*Q}$ записывается в виде:

$$\omega_i^j = 0 , \quad \omega_i^3 = 0 , \quad \omega_i^4 = 0 , \quad \omega_3^4 = \omega^1 + \omega^2 , \quad \omega_4^1 = \omega_4^2 ,$$

$$\omega_4^2 = a(\omega^1 - \omega^2) , \quad \omega_4^3 = - \omega_4^1 , \quad \omega_4^4 - \omega_3^3 = \omega_4^1 + \omega_4^2 + (b+1)\omega_3^4 , \qquad (2.17)$$

$$\omega_i^i - \omega_3^3 = \omega^i , \quad db - b\,(2b+1)\omega_3^4 + 2\,(2b+1)\omega_4^3 = 0 \quad (b \overset{def}{=} a_{44}) .$$

Исследуя систему уравнений (2.17), убеждаемся в справедливости теоремы.

Т е о р е м а 4. Конгруэнция $(CL)_{1,2}^{*Q}$ обладает следующими свойствами: 1/ вершины A_i репера неподвижны; 2/ поверхность (A_4) вырождается в линию, касательная к которой пересекает плоскость коники C в полюсе ее характеристики относительно коники; 3/ конгруэнция (L) параболическая, торсы ее высекают на поверхности (A_3) линии, гармонически разделяющие координатную сеть вместе с линиями, высекаемыми поверхностью $(L)_C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ $dA_i = \omega_i^i A_i$.

2/ Имеем

$$dA_4 = \omega_4^4 A_4 + a\,(\omega^1 - \omega^2)\,(A_1 + A_2 - A_3) . \qquad (2.18)$$

Находя полюс характеристики плоскости коники C относительно коники, убеждаемся, что он совпадает с точкой $A_1 + A_2 - A_3$.

3/ Фокусы $sA_3 + tA_4$ луча L и торсы конгруэнции (L) определяются соответственно уравнениями

$$s^2 = 0 , \qquad (2.19)$$

$$(\omega^1 - \omega^2)^2 = 0 . \qquad (2.20)$$

Сравнивая (1.14) с (2.20), убедимся в справедливости последнего утверждения теоремы. Теорема доказана.

Список литературы

1. С к р ы д л о в а Е.В. Вырожденные конгруэнции $(CL)_{1,2}$ в трехмерном проективном пространстве.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.5,Калининград,1974, с.141-158.

2. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.3,Калининград,1973,с.41-49.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

А.В.С т о л я р о в

УСЛОВИЕ КВАДРАТИЧНОСТИ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ

1. В последнее десятилетие по проективной теории регулярных гиперполос [1] в работах Ю.И.Попова (см.[5]-[8]), Василяна М.А. (см.[2],[3]) и ряда других геометров получены существенные результаты.

В одной из наших работ по этой теории, а именно в кратком сообщении [10], приведено (без доказательства) инвариантное аналитическое условие квадратичности регулярной m-мерной гиперполосы H_m, погруженной в n-мерное проективное пространство P_n ($2 \leq m < n-1$); настоящая статья содержит полное доказательство этого условия, причем все построения проведены в минимально канонизированном репере первого порядка.

2. Относительно репера первого порядка уравнение регулярной гиперполосы $H_m \subset P_n$ имеет вид (см., например, [9],[11])

$$\omega_0^n = \omega_0^v = \omega_v^n = 0, \quad \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j,$$
$$\omega_i^v = M_{ij}^v \omega_0^j, \quad \omega_v^i = N_{vj}^i \omega_0^j, \qquad (1)$$

$$i,j,k,\ell,s,t = 1,2,\dots,m; \quad u,v,w = m+1,\dots,n-1.$$

Отметим, что Λ_{ij}^n - симметрический невырожденный тензор