N.N. Iv a n i c s h e v a

DIFFERENTIABLE MAPPING OF PROJECTIVE SPACE P_n INTO MANIFOLD OF HIPERQUADRICS OF THE SPACE P_n

Differentiable mapping f: $P_m \to R(Q)$ of the projective space P_m into manifold of hyperquadrics R(Q) of the projective space P_n are studied. The notions of inflexional curve *l*:☼→R(Q) in the element $\mathring{Q}$ is introduced. Necessery and sufficient conditions of inflexion of the curve *l*:☼→R(Q) in the element $\mathring{Q}$ are formulated. Characteristic straight lines and characteristic directions of the mapping f are considered.

УДК 514.75

SPEZIELLE DISTRIBUTIONEN AUF GRASSMANN'SCHER MANNIGFALTIGKEIT (III)

V.V. K a i s e r

(Friedrich -Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg)

Mit Hilfe des analytischen Apparat [1] sind speziellen nichtholonomen Kongruenzen bestimmt und entsprechende Ergebnisse, die im ersten Teil des Sufsatzes [2] formuliert sind, bewiesen.

3. Nichtholonome Kongruenzen.

3.1. Allgemeine Klassifikation. Aus dem Lemma 2.1 [1] folgt, daβ jede beliebige 2-dimensionale Distribution k (nicht holonome Kongruenz) auf der Grassmann'schen Mannigfaltigkeit M mit Hilfe von einem Pfaff'schen Gleichungssystem

$$\begin{cases} a_1\Omega^1 + a_2\Omega^2 + a_3\Omega^3 + a_4\Omega^4 = 0, \\ b_1\Omega^1 + b_2\Omega^2 + b_3\Omega^3 + b_4\Omega^4 = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

(local) bestimmt werden kann, wobei der Rang der Matrix des Systems (3.1) gleich zwei sein muβ.

Es sei $T=t^0A_0+t^1A_1$ ein Punkt auf der laufenden Geraden $l \in M$. Aus (2.1) mit der Berücksichtigung von (2.3) folgt

$$\begin{gathered} dT = \left(dt^0 + t^0\omega_0^0 + t^1\omega_1^0\right)A^0 + \left(dt^1 + t^0\omega_0^1 + t^1\omega_1^1\right)A^1 + \\ + \left(-t^0\Omega^3 + t^1\Omega^1\right)A_2 + \left(t^0\Omega^4 + t^1\Omega^2\right)A_3. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Daraus folgt, daβ der Punkt T den Brennpunkt einer integralen Torse (aufrollbaren Fläche) für k ist, wenn zusätzlich zu (3.1) gelten

$$t^0\Omega^3 - t^1\Omega^1 = 0, \quad t^0\Omega^4 + t^1\Omega^2 = 0. \tag{3.3}$$

Das homogene Gleichungssystem, das aus der Gleichungen (3.1) und (3.3) besteht, besitzt eine nicht triviale Lösung bezüglich Ω^1, Ω^2, Ω^3, Ω^4 dann und nur dann, wenn gilt

$$\sum_{i,j=0,1} f_{ij} t^i t^j = 0, \tag{3.4}$$

wo

$$f_{00} = q^{12}, \quad f_{01} = f_{10} = -\tfrac{1}{2}\left(q^{14} + q^{23}\right), \quad f_{11} = -q^{34}, \tag{3.5}$$

wobei

$$q^{ij} = \left(a_i b_j - a_j b_i\right) \tag{3.6}$$

die bekannten dualen Grassmann'schen Koordinaten [3] der laufenden 2-Ebene $k(l) \subset T_l M$ der Distribution k sind.

Die Gleichung (3.4) bestimmt die Brennpunkte der Geraden $l \in M$ in bezug auf die nicht holonome Kongruenz (3.1) (vgl. [4], [5]).

Dualerweise ergibt sich analog, daβ die die laufende Gerade $l \in M$ enthaltene und von der Gleichung $x_2 x^2 + x_3 x^3 = 0$ bestimmte Ebene die Tangentialebene einer integralen Torse der Distribution k wird, wenn zusätzlich zu (3.1) gelten:

$$x_2\Omega^1 + x_3\Omega^2 = 0, \quad x_2\Omega^3 - x_3\Omega^4 = 0. \tag{3.7}$$

Das Gleichungssystem, das aus der Gleichungen (3.1) und (3.7) besteht, besitzt eine nicht triviale Lösung bezüglich Ω^1, Ω^2, Ω^3, Ω^4 dann und nur dann, wenn gilt:

$$\sum_{i,j=2,3} g^{ij} x_i x_j = 0, \tag{3.8}$$

wo

$$g^{22} = q^{24}, \quad g^{23} = g^{32} = \tfrac{1}{2}\left(q^{23} - q^{14}\right), \quad g^{33} = -q^{13}. \tag{3.9}$$

Die Gleichung (3.8) bestimmt die Brennebene der Geraden $l \in M$ in bezug auf die nicht holonome Kongruenz (3.1) (vgl. [4], [5]).

Es ist leicht mit der Berücksichtigung der offenbare Gleichheit für die dualen Grassmann'schen Koordinaten

$$q^{12}q^{34} - q^{13}q^{24} + q^{14}q^{23} = 0 \tag{3.10}$$

zu berechnen, daβ die in den linken Gleichungsseiten (3.3) und (3.7) stehenden quadratischen Formen die gleichen Diskriminanten haben. Deswegen besitzt jede Gerade $l \in M$ zwei verschiedene Brennpunkte dann und nur dann, wenn sie zwei verschiedene fokale Ebene besitzt (solche nichtholonome Kongruenzen nennen wir hyperbolisch). Dasselbe bezieht sich auf den (parabolischen) Fall der übereinstimmenden Brennpunkte und übereinstimmenden fokalen Ebenen. Im elliptischen Fall gibt es keine Brennebenen.

Es können noch zwei Fälle auftreten, wenn entweder Brenennebene oder Brennpunkte unbestimmbar sind (d.h. jede die laufende Gerade $l \in M$ enthaltene Ebene eine Brennebene ist oder jeder Punkt der laufenden Geraden $l \in M$ ein Brennpunkt ist). Beides zusammen kann nicht auftreten, da sonst alle q^{ij} gleich Null wären und deswegen der Rang des Systems (3.1) nicht gleich zwei wäre.

Im ersten Fall (wenn die fokalen Ebenen unbestimmt sind) haben wir aus (3.9) $q^{24}=q^{23}-q^{14}=q^{13}=0$. Aus der Gleichung (3.10) folgt dann $q^{12}q^{34}+\left(q^{14}\right)^2=0$. Die Gleichung (3.4) wird der Gleichung $\left(q^{12}t^0-q^{14}t^1\right)^2=0$ äquivalent, d.h. es gibt in diesem Fall auf der laufenden Gerade $l \in M$ nur einen Brennpunkt $M=q^{14}A_0+q^{12}A_1$. Wir nennen solche nichtholonome Kongruenzen (mit einem Brennpunkt auf jeder Gerade $l \in M$ und mit unbestimmten fokalen Ebenen) nichtholonome spezielle Kongruenzen des ersten Typs.

Im zweiten Fall (wenn die Brennpunkte unbestimmt sind) wird die Gleichungen (3.8) dann der Gleichung $\left(x_2q^{24}-x_3q^{14}\right)^2=0$ äquivalent, d.h. es gibt nur eine Brennebene, die von der Gleichung $q^{14}x^2+q^{24}x^3=0$ bestimmt wird. Wir nennen solche nichtholonome Kongruenzen (mit einer Brennebene für jede Gerade $l \in M$ und mit unbestimmten Brennpunkten) spezielle nichtholonome Kongruenzen des zweiten Typs.

3.2. Spezielle nichtholonome Kongruenzen. Hier werden die Sätze 1.1-1.4 bewiesen.

Beweis des Satzes 1.1. Geben wir auf jeder Geraden $l \in M$ einen Punkt $A=\alpha_0A_0+\alpha_1A_1$ glattweise an und suchen wir eine nichtholonome Kongruenz k auf M vom ersten Typ (d.h. mit unbestimmten Brennebenen), so daβ diese Punkte in bezug auf gesuchte nichtholonome Kongruenz k die Brennpunkte der Geraden $l \in M$ wären. Wenn k mit Hilfe vom Differentialsystem (3.1) bestimmt wird, dann gelten $q^{24}=q^{23}-q^{14}=q^{13}=0$ und $q^{12}q^{34}+\left(q^{14}\right)^2=0$. Da die Gleichung (3.4) eine eindeutige bis auf einen Multiplikator bestimmte Lösung (α_0, α_1) besizt, wird diese Gleichung der Gleichung $\left(t^0\alpha_1-t^1\alpha_0\right)^2=0$ äquivalent. Dann gelten

$$q^{12}=\mu\left(\alpha^1\right)^2, \quad q^{14}=\mu\alpha^0\alpha^1, \quad q^{34}=-\mu\left(\alpha^0\right)^2, \tag{3.11}$$

wobei offenbar $\mu\neq 0$. Wenn $\alpha^0\neq 0$, gilt $q^{34}\neq 0$. Dann wird das System (3.1) dem System $q^{34}\Omega^3=-q^{14}\Omega^1$, $q^{34}\Omega^4=q^{23}\Omega^2$ äquivalent. Laut (3.11) wird es auch dem System (3.3) mit $t^0=\alpha^0$, $t^1=\alpha^1$ äquivalent. Damit ist der Beweis des Satzes 1.1 beendet.

Der *Beweis des Satzes 1.2* ist analog. Dabei wird das glatte Feld von Brennebenen $x_2x^2+x_3x^3=0$ der Geraden $l \in M$ eine nichtholonome Kongruenz des zweite Typs mit Hilfe vom Differentialsystem (3.7) definiertn.

Beweis des Satzes 1.3. Der Punkt A_0 der laufenden Geraden $l \in M$ sei der Brennpunkt von l in bezug auf eine nichtholonome Kongruenz k.Wie es aus dem Beweis des Satzes 1.1 folgt, wird k vom System (3.3) (wo man $t^1=0$ setzen muβ), d.h. $\Omega^3=\Omega^4=0$ bestimmt. Aus (2.1) und (2.3) haben wir

$$d\Omega^3 = \Omega^3 \wedge \left(\omega_0^0 - \omega_2^2\right) + \omega^1 \wedge \omega_0^1 - \Omega^4 \wedge \omega_2^3,$$

$$d\Omega^4 = \Omega^4 \wedge \left(\omega_3^3 - \omega_0^0\right) - \omega^2 \wedge \omega_0^1 - \Omega^3 \wedge \omega_2^3.$$

Laut dem Lemma 3.1 können wir setzen $\omega_0^1 = \sum_{i=1}^4 c_i \Omega^i$. Aus der Integritäts-bedingungen

$$d\Omega^3 \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^4 = 0, \quad d\Omega^4 \wedge \Omega^3 \wedge \Omega^4 = 0 \quad \text{(siehe [6])}$$

erhalten wir $c_1=c_2=0$. Aus (3.1) haben wir dann

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \left(c_3 A_1 - A_2\right)\Omega^3 + \left(c_4 A_1 + A_3\right)\Omega^4.$$

Dies bedeutet, daβ alle integrale Regelfläche von k, die die Geraden l erhalten, die Kegeln mit der Spitze im Punkt A_0 sind. Umgekehrt sei Q die 2-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit, die den Bündel aller durch den Punkt A_0 durchgehenden Geraden darstellt. Betrachten wir eine Regelfläche, die als eine Kurve auf der Grassmann'schen Mannigfalltigkeit M mit Hilfe vom Differentialsystem (2.4) bestimmt werden kann. Wenn diese Kurve auf der Mannigfaltigkeit Q liegt, d. h. ein Kegel mit der Spitze im Punkt A_0 darstellt, muβ das Differential $d\left(A_0 \wedge A_1\right)$ bei den Bedingungen (3.12) nur durch die Grassmann'sche Produkte

$$B_0 = A_0 \wedge A_1, \quad B_1 = A_0 \wedge A_2, \quad B_2 = A_0 \wedge A_3$$

ausgedruckt werden. Aus (2.4) haben wir

$$dB_0 = \left(\omega_0^0 + \omega_1^1\right)B_0 + \theta\left(\lambda^1 B_1 + \lambda^2 B_2 + \lambda^3 B_3 + \lambda^4 B_4\right).$$

Daraus folgt, daβ $\lambda^3=0$, $\lambda^4=0$. Dies bedeutet, daβ dieser Kegel wirklich eine integrale Regelfläche von k ist. Das beendet den Beweis des Satzes 1.3.

Der Satz 1.4 ist analog zu beweisen.

Literatur

1. *Kaiser V.V.* Spezielle Distributionen auf Grassmann'scher Mannigfaltigkeit (II) // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1998. № 29. С.28-31.
2. *Kaiser V.V.* Spezielle Distributionen auf Grassmann'scher Mannigfaltigkeit (II) // Там же, 1997. № 28. С. 38-47.
3. *Chodge W.V. D., Pedoe D.* Methods of algebraic geometry. Cambridge, 1947. Vol. 1.
4. *Hoschek J.* Liniengeometie. Zürich, 1971.
5. *Finikov S.P.* Teorie der Kongruenzen. Berlin, 1959.
6. *Spivak M.* A comprechensive introduction to differential geometry. Boston, 1970. Vol. 1.

В.В. К а й з е р

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ГРАССМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ (III)

С помощью аналитического аппарата [1] выделены специальные неголономные конгруэнции и доказаны соответствующие результаты, сформулированные в 1-ой части работы [2].

УДК 512.7

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПОСТРОЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Ю.С.К а с а т к и н а

(Калининградский государственный университет)

В настоящей работе ставится задача построения алгебраических кривых с большим числом рациональных точек, опираясь лишь на обобщенные веса Хемминга подкодов малой размерности. Рассмотрен пример, иллюстрирующий метод построения кривых, исходя из подкодов малых размерностей.

Вопрос построения алгебраических кривых с большим числом рациональных точек актуален как с теоретической, так и с практической точек зрения. В теории кодирования, например, такие кривые дают возможность построения кодов с хорошими характеристиками. Наличие большого числа рациональных точек на эллиптической кривой также значительно улучшает параметры криптосистемы. Для получения таких кривых используются различные подходы. Классический подход А.Вейля основан на расширении поля констант функционального поля. М.А.Цфасман и С.Г.Владут использовали для построения кодов так называемые модулярные кривые; F.Torres рассматривает этот вопрос с позиции алгебраической геометрии. Сравнительно недавно G.Geer и M.Vlugt [1] предложили новый подход к построению кривых с большим числом рациональных точек. Он основан на знании иерархии весов кода [2] и конструкции следов кодов [3], [4]. Однако, в общем случае, определение обобщенного веса Хемминга, следовательно, и весовой иерархии кода достаточно сложная задача. Распределение весов известно лишь для некоторых классов кодов.

Рассмотрим подробнее метод, предложенный в работе [1]. Пусть F_q - конечное поле, состоящее из $q = p^m$ элементов. Известно, что применяя отображение следа, можно коду C над полем F_q поставить в соответствие код над F_p, который называется следом кода C и обозначается Tr(C). Рассмотрим конечномерное над F_q подпространство L поля рациональных функций $F_q(x)$. Обозначим P - множе-