УДК 517.95, 519.633.6.6

В. М. Филатова

ЧИСЛЕННОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ МЕТОДОМ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Предложен алгоритм численного решения обратной динамической задачи о восстановлении поглощения методом граничного управления. Поглощение определяется независимо от скорости звука, которая может быть произвольной гладкой положительной функцией. Приводятся результаты численного моделирования.

A numerical algorithm for solving inverse dynamical problem recovering an absorption by the boundary control method is developed. The absorption coefficient is determined independently of a speed of sound, which can be an arbitrary smooth positive function. The results of numerical experiments are represented.

Ключевые слова: многомерные обратные динамические задачи, метод граничного управления, численное решение обратных динамических задач.

Key words: multidimensional inverse dynamical problem, boundary control method, numerical solving inverse dynamical problems.

Прямая задача

Пусть D — ограниченная область в R^2 с внешней границей Γ. Рассмотрим начально-краевую (прямую) задачу для волнового уравнения

$$\rho u_{tt} - \Delta u + \sigma u_t = 0, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$u_\nu|_{\Gamma\times[0,T]} = f \in L^2(\Gamma\times[0,T]), \tag{3}$$

где $c(x) = 1/\sqrt{\rho(x)}$ — скорость звука; $\sigma(x)$ — коэффициент поглощения; u_ν — производная по нормали. Решение прямой задачи обозначим u^f и назовем волной, возбужденной *управлением f*. Волну $u^f(\cdot,T)$ в момент времени $t=T$ назовем *финальным состоянием*. Системе (1)—(3) сопоставим оператор реакции $R^T : L^2(\Gamma\times[0,T]) \to L^2(\Gamma\times[0,T])$, определяемый $R^T f = u^f|_{\Gamma\times[0,T]}$. Это ограниченный в $L^2(\Gamma\times[0,T])$ оператор [1].

Обратная задача

Рассмотрим обратную задачу восстановления $\sigma(x)$ во всей области D по данным обратной задачи: оператору R^{2T}, заданному при фиксированном T, $T/2 > T^* = \sup_{x\in D} \mathrm{dist}(x,\Gamma)$, где расстояние рассматривается в смысле римановой метрики $|dx|/c(x)$, $c(x)$ остается неизвестной.

Решение обратной динамической задачи основывается на методе граничного управления (BC-метод) [2]. Используется одна из версий BC-метода [3]. Настоящая статья является продолжением работ [4; 5].

Билинейные формы

Приведем известные результаты, используемые при решении задачи. Определим билинейную форму $Q(f,g)$:

$$Q(f,g)=\int_D(\nabla u^f(x,T),\nabla u^g(x,T))dx-\int_D\rho(x)u_t^f(x,T)u_t^g(x,T)dx. \quad (4)$$

Оказывается, (4) определяются через данные обратной задачи:

$$Q(f,g)=\int_\Gamma d\Gamma\int_0^T[-u_t^g(\cdot,2T-t)f(\cdot,t)+u_t^f(\cdot,t)g(\cdot,2T-t)]dt. \quad (5)$$

Вывод (5) приведен в [6].

Введем билинейную форму $\Sigma(f,g)$:

$$\Sigma(f,g)=\int_D\sigma(x)u^f(x,T)u^g(x,T)dx. \quad (6)$$

Пусть v — произвольное решение волнового уравнения

$$\rho v_{tt}-\Delta v-\sigma v_t=0. \quad (7)$$

Умножим (1) на v, а (7) на u^f и вычтем, проинтегрируем по $D\times[0,T]$:

$$\int_D\rho(x)[vu_t^f-u^f v_t](x,T)dx+\int_D\sigma(x)vu^f(x,T)dx=\int_0^T\int_\Gamma[vf-u^f v_\nu](x,t)d\Gamma dt.$$

Возьмем $v(x,t)=u^g(x,2T-t)$, тогда

$$\begin{aligned}\Sigma(f,g)&=\int_D\sigma u^f(\cdot,T)u^g(\cdot,T)dx=\\&=-\int_D\rho\left[u_t^f(\cdot,T)u^g(\cdot,T)+u_t^g(\cdot,T)u^f(\cdot,T)\right]dx+\\&+\int_0^T dt\int_\Gamma\left[u^g(\cdot,2T-t)f(\cdot,t)-u^f(\cdot,t)g(\cdot,2T-t)\right]dx.\end{aligned} \quad (8)$$

Задача граничного управления

Рассмотрим *задачу граничного управления*: по заданным функциям $\varphi\in H^1(D),\ \psi\in L^2(D)$ требуется найти управление f такое, что

$$u^f(\cdot,T)=\varphi, \quad (9)$$

$$u_t^f(\cdot,T)=\psi. \quad (10)$$

Известно, что при достаточно больших T: $T/2>T^*$, задача (9)—(10) плотно разрешима в пространстве управлений $H^1\times L^2$ [5]. При решении задачи граничного управления воспользуемся формой (4), которая выражается через данные обратной задачи по формуле (5).

Пусть φ — произвольная гладкая гармоническая функция в $D \cup \Gamma$, а $\psi = 0$. Введем функционал $\Phi(g): \Phi(g) = \int_D (\nabla\varphi(x,T), \nabla u^g(x,T))dx$. Заметим, что $\Phi(g)$ явно выражается через данные обратной задачи:

$$\Phi(g) = \int_\Gamma u^g(x,T)\varphi_\nu d\Gamma.$$

Равенства $u^f(\cdot,T) = \varphi$, $u_t^f(\cdot,T) = 0$ выполняются тогда и только тогда, когда управление *f* удовлетворяет уравнению и условиям [5]:

$$Q(f,g) = \Phi(g),\ \forall g \in L^2(\Gamma \times [0,T]) . \quad (11)$$

$$u^f(x,T)\big|_\Gamma = \varphi,\ u_t^f(x,T)\big|_\Gamma = 0. \quad (12)$$

Схема решения обратной задачи

Коэффициент поглощения можно восстановить по такой схеме.

1. Для всевозможных гладких вплоть до границы гармонических функций φ и $\psi = 0$ решается задача граничного управления (9)—(10), используя уравнение (11) и условия (12). Тем самым определяются управления f_φ такие, что $u^{f_\varphi}(x,T) \approx \varphi(x)$, $u_t^{f_\varphi}(x,T) \approx 0$.

2. Подставляя в (8) f_{φ_1} для u^f и f_{φ_2} для u^g, получаем

$$\int_D \sigma(x)\varphi_1\varphi_2 dx \approx \int_0^T \int_\Gamma [u^{f_{\varphi_2}}(\cdot,2T-t)f_{\varphi_1}(\cdot,t) - u^{f_{\varphi_1}}(\cdot,t)f_{\varphi_2}(\cdot,2T-t)]d\Gamma dt. \quad (13)$$

Поскольку линейная оболочка, порожденная всевозможными произведениями φ_1, φ_2, плотна в $L^2(D)$, можно использовать (13) для определения σ. Важная особенность процедуры решения обратной задачи в том, что оба шага алгоритма — решение линейных задач.

Численное решение прямой задачи

Прямая задача решалась методом конечных элементов. В области D строилась триангуляционная сетка Делоне. Использовалась кусочно-постоянная модель скорости звука и поглощения. Решение прямой задачи раскладывалось по кусочно-линейным базисным функциям МКЭ $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, N$:

$$u_N(x,t) \approx \sum_{n=1}^N U_n(t)\phi_n(x), \quad (14)$$

где N — число узлов. Метод Галеркина сводит исходную прямую задачу к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$MU'' + KU + M^\sigma U' = G,\ G_i(t) = \int_\Gamma f(x,t)\phi_i dx, i = 1, \dots, N \quad (15)$$

с нулевыми данными Коши

$$U(0) = U'(0) = 0 \ . \quad (16)$$

Решение задачи (15)—(16), отвечающее управлению f, будем обозначать $U^f(t)$, а вектор-функцию в правой части — $G^f(t)$. Постоянные матрицы M, K (матрица масс и матрица жесткости) и M^σ (матрица масс) вычисляются по формулам

$$M_{ij} = \int_D \rho\phi_i\phi_j dx,\ M_{ij}^\sigma = \int_D \sigma\phi_i\phi_j dx,\ K_{ij} = \int_D (\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) dx. \tag{17}$$

Система ОДУ (15) аппроксимировалась по явной схеме:

$$M\frac{U^j - 2U^{j-1} + U^{j-2}}{\Delta t^2} + KU^{j-1} + M^\sigma \frac{U^j - U^{j-2}}{2\Delta t} = G^{j-1},$$

где Δt — шаг по времени. Имеем СЛАУ для U^j с $A = M + \Delta t/2\, M^\sigma$ и вектором правой части $B = \Delta t^2 G^{j-1} + U^{j-1}\left(2M - \Delta t^2 K\right) + U^{j-2}(-M + (\Delta t/2)M^\sigma)$. Начальное приближение $U^0 = 0,\ U^1 = \Delta t^2 G^0 \approx 0$. Решение прямой задачи в граничных узлах обозначим $(Rf(t))_i = U_i^f(t),\ x_i \in \Gamma$.

Задача граничного управления в дискретном виде

Билинейная форма (5) при представлении решения в виде (14) запишется следующим образом:

$$Q(f, g) \approx (KU^f(T), U^g(T)) - \left(MU_t^f(T), U_t^g(T)\right) =$$
$$= \int_0^T [-(Rg)_t(2T - t)G^f(t) + (Rf)_t(t)G^g(2T - t)]dt. \tag{18}$$

Задача граничного управления примет вид

$$U^{f_\varphi}(T) = \varphi, \tag{19}$$

$$U_t^{f_\varphi}(T) = 0. \tag{20}$$

Управление f_φ будем искать в виде

$$f_\varphi = \sum_{k=1}^L c_k g_k, \tag{21}$$

где $g_1, g_2, \ldots, g_L \in L^2(\Gamma \times [0, T])$ — линейно-независимая система управлений; L — количество управлений. Тогда задача граничного управления (19)—(20) сводится к СЛАУ относительно c_k:

$$Q(f_\varphi, g_l) = \sum_{k=1}^L c_k Q(g_k, g_l) = ((Rg_l)(T), G_{\varphi_n}), \tag{22}$$

$$U^{f_\phi}(x, T)\big|_{x\in\Gamma} = \phi(x)\big|_{x\in\Gamma},\ U_t^{f_\phi}(x, T)\big|_{x\in\Gamma} = 0\,\big|_{x\in\Gamma}. \tag{23}$$

Численное восстановление σ

Форма $\Sigma(f, g)$ (8) в дискретной постановке принимает вид

$$\Sigma(f,g) \approx U^f(T)M_\sigma U^g(T) = -U^{f'}(T)MU^g(T) - U^f(T)MU^{g'}(T) + \\ +\int_0^T [(Rg)(2T-t)G_f(t) - (Rf)(t)G_g(2T-t)]dt. \qquad (24)$$

Опишем схему восстановления поглощения в дискретном виде.

1. Рассчитываем сеточные «гармонические функции» φ_j, $j=1,\dots,J$ (J — количество граничных узлов) из дискретного аналога задачи Неймана для уравнения Лапласа $K\varphi_{(j)} = G_{(j)}$, где вектора $G_{(j)}$ — произвольные линейно-независимые граничные вектора.

2. Определяем некоторую линейно-независимую систему управлений $g_1, g_2, \dots, g_L \in L^2(\Gamma\times[0,T])$.

3. Для каждой $\varphi_{(j)}$ решаем задачу граничного управления (19)—(20)

$$U^{f_{\varphi(j)}}(T) = \varphi_{(j)},\ U_t^{f_{\varphi(j)}}(T) = 0,\ j=1,\dots,J.$$

Искомое управление $f_{\varphi_{(j)}}$ представляем в виде (21). Задача граничного управления сводится к нахождению коэффициентов разложения c_k из системы линейных уравнений (22) и условий (23).

4. Запишем билинейную форму $\Sigma(f,g)$ (6) в дискретном виде

$$\Sigma(f,g) = \sum_i \sum_j U_i^f(T)U_j^g(T)\int_D \sigma(x)\psi_i(x)\psi_j(x)dx = (U^f, M^\sigma U^g).$$

Подставляя сюда $f = f_{\varphi_{(i)}}$, $g = f_{\varphi_{(j)}}$, получим систему уравнений

$$\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{k=1}^{Tr}\sigma_k\varphi_{(p)}^i\varphi_{(q)}^j\int_{\Delta_k}\psi_i(x)\psi_j(x)dx = \Sigma(f_{\varphi_{(p)}}, f_{\varphi_{(q)}}),\ p,q=1,\dots,J, \qquad (25)$$

где правая часть вычисляется исходя из (24):

$$\Sigma\left(f_{\varphi_{(p)}}, f_{\varphi_{(q)}}\right) = \int_0^T [U^{f_{\varphi(q)}}(2T-t)G_{f_{\varphi(p)}}(t) - U^{f_{\varphi(p)}}(t)G_{f_{\varphi(q)}}(2T-t)]dt.$$

Таким образом, получили систему линейных уравнений (25) (размерности $Tr\times J(J+1)/2$, где Tr — количество треугольников) относительно σ_k, $k=\overline{1,Tr}$. Система линейных уравнений (22) решалась псевдообращением, а решение в (25) отыскивалось с помощью минимизации функционала с учетом априорных ограничений на σ_k.

Численные эксперименты

В среде MATLAB был разработан комплекс функций, позволяющий проводить численные эксперименты.

Область D — круг радиусом $\mathrm{r}=1$. В численных экспериментах $T^* \leqslant 1$ (T^* — время заполнения), далее полагаем $T=2$.

Использовалась следующая триангуляционная сетка: количество узлов сетки $N=8385$, количество граничных узлов $J=256$, количество треугольников $Tr=16512$. В качестве g_l взяты функции:

$$g_l = g^{sp}(x,t) = \delta_s(x)h_p(t),\ s=1,\dots,S,\ p=1,\dots,P,\ x\in\Gamma, \qquad (27)$$

где $h_p(t)$ — функция Рикера (частота $f = 10$ Гц), смещенная на шаг $p\Delta t$ (рис. 1), $\delta_s(x)$ — «сеточная» дельта-функция для граничного узла с номером s, где

$$\delta_s(x_j) = \begin{cases} 1, & s = j, \\ 0, & s \neq j; \end{cases} \quad S = 256;\ P = 100.$$

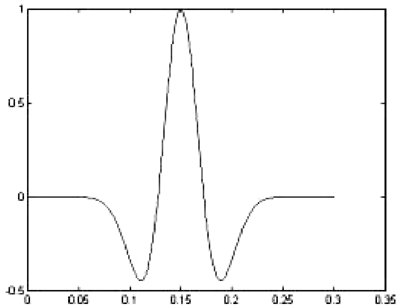


Рис. 1. Функция Рикера

Модель скорости звука $c(x)$ имеет вид, показанный на рисунке 2. Модель поглощения и результат восстановления даны на рисунке 3.

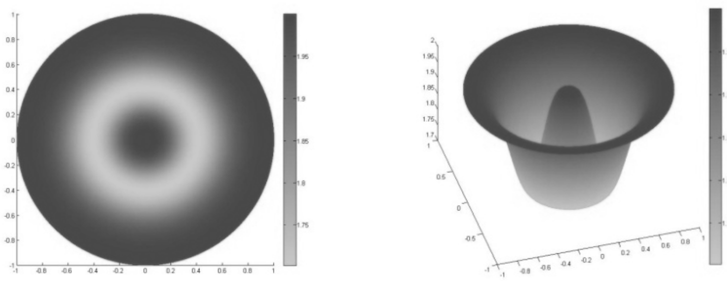
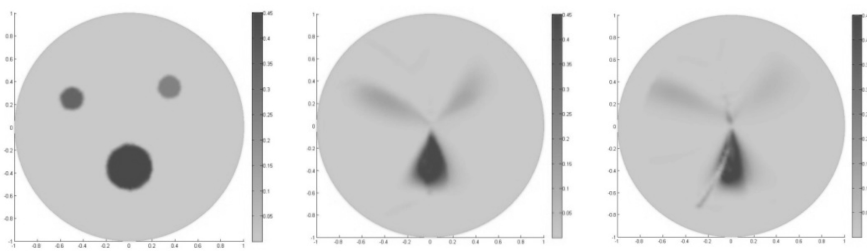


Рис. 2. Модель скорости звука ($c(x) > 0$)



а *б* *в*

Рис. 3. Модель поглощения и результат восстановления:
а — модель поглощения; *б* — реконструкция поглощения;
в — реконструкция поглощения с информацией на границе области

Автор приносит глубокую благодарность научному руководителю Л. Н. Пестову за помощь при проведении научных исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проектам № 12-01-00260а.

Список литературы

1. *Lions J.-L.* ContrôleOptimale de Systèmes Gouvernés par des Équationsaux Dérivéespartielles. Paris, 1968.

2. *Belishev M. I.* Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC-method) // Inverse Problems.1997. 13. R1—R45.

3. *Pestov L. N.* On reconstruction of the speed of sound from a part of boundary // Journal of inverse and ill-posed problems. 1999. Vol. 7, N. 5. P. 481—486.

4. *Pestov L., Bolgova V., Kazarina O.* Numerical recovering a density by BC-method // Inverse Problems and Imaging. 2011. Vol. 4, N. 4. P. 703—712.

5. *Pestov L. N., Bolgova V. M., Danilin A. N.* Numerical recovering of a speed of sound by the BC-method in 3D //Acoustical Imaging. Springer. 2012. Vol. 31, N. 8, P. 508.

6. *Pestov L. N.* Inverse problem of determining absorption coefficient in the wave equation by BC method // Journal of inverse and ill-posed problems. 2012. Vol. 20, N. 1. P. 103—110.

Об авторе

Виктория Михайловна Филатова — науч. сотр., Балтийский федеральный университет им. И. Канта.

E-mail: ViFilatova @kantiana. ru

Author

Viktoriia Filatova — researcher, I. Kant Baltic Federal University.

E-mail: ViFilatova @kantiana.ru