УДК 514.75

**_О. О. Белова_**
_Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия_
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-5

# Псевдотензор деформации связностей коконгруэнции $K_{(n-m)m}$

В $n$-мерном проективном пространстве исследуется коконгруэнция $m$-мерных плоскостей. Расширенное композиционное оснащение данной коконгруэнции полями $(n-m-1)$-мерных плоскостей и точками $C$ на $m$-мерных плоскостях позволяет задать связности трех типов в ассоциированном расслоении, причем одна из трех связностей является средней по отношению к двум другим. Рассмотрена деформация связностей и показано, что объект деформации является псевдотензором. Работа выполнена методом продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева с заданием связностей в главном расслоении.

***Ключевые слова***: проективное пространство, коконгруэнция $m$-мерных плоскостей, связность, деформация связности

Продолжается исследование коконгруэнции $m$-мерных плоскостей [2] с использованием метода Картана — Лаптева [1; 11; 12; 15; 17; 18].

Интерес к изучению подмногообразий многообразия Грассмана демонстрируют многие геометры [3; 4; 13; 14].

В проективном пространстве $P_n$ будем использовать подвижной репер $\{A, A_i\}$ $(i, ... = 1, ..., n)$. Инфинитезимальные перемещения данного репера определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^i A_i, dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i A,$$

*Поступила в редакцию 15.12.2022 г.*

$\omega^i$, $\omega_i, \omega_j^i$ — формы Пфаффа — удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j,$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i. \qquad (1)$$

Многообразие Грассмана $G(m,n)$ — множество всех $m$-мерных плоскостей $n$-мерного проективного пространства, причем $\dim G(m,n) = (n-m)(m+1)$. Одним из подмногообразий многообразия Грассмана является комплекс $m$-плоскостей, если размерность комплекса превышает разность $n-m$ (см.: [7]).

В своей статье [3] В. И. Близникас дал классификацию подмногообраий многообразия Грассмана, назвав комплекс $K_{(n-m)m}$ плоскостей размерности $m\,(1 \le m < n)$ коконгруэнцией $m$-мерных плоскостей.

Коконгруэнция $K_{(n-m)m}$ задается уравнениями (см.: [2])

$$\omega^\alpha = \Lambda_\beta^{\alpha a} \omega_a^\beta,$$

$a, \ldots = 1, \ldots, m;$ $\alpha, \ldots = m+1, \ldots, n,$ причем компоненты фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda = \{\Lambda_\beta^{\alpha a}\}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм $\omega_a^\alpha$

$$\Delta\Lambda_\beta^{\alpha a} + \Lambda_\gamma^{\alpha b} \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_b - \delta_\beta^\alpha \omega^a \equiv 0,$$

причем дифференциальный оператор $\Delta$ действует по закону (см., напр., [16])

$$\Delta\Lambda_\beta^{\alpha a} = d\Lambda_\beta^{\alpha a} + \Lambda_\beta^{\gamma a} \omega_\gamma^\alpha + \Lambda_\beta^{\alpha b} \omega_b^a - \Lambda_\gamma^{\alpha a} \omega_\beta^\gamma.$$

***Замечание.*** Если $m = 1$, то коконгруэнция совпадает с конгруэнцией прямых [5; 6].

В главном расслоении $G_s(K)$, где

$$s = n(n+1) - m(n-m-1),$$

задается связность способом Лаптева — Лумисте [2; 8; 9]:

$$\widetilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{b\alpha}^{ac}\omega_c^\alpha, \quad \widetilde{\omega}^a = \omega^a - \Gamma_\alpha^{ab}\omega_b^\alpha,$$

$$\widetilde{\omega}_\alpha^a = \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha\beta}^{ab}\omega_b^\beta, \quad \widetilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a}\omega_a^\gamma, \tag{2}$$

$$\widetilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma_{a\alpha}^b\omega_b^\alpha, \widetilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - \Gamma_{\alpha\beta}^a\omega_a^\beta.$$

Вычисляя внешние дифференциалы форм (2), используя структурные уравнения (1) и применяя теорему Картана — Лаптева, находим

$$\Delta\Gamma_{b\alpha}^{ac} + (\delta_b^a\Gamma_{e\alpha}^c + \delta_e^a\Gamma_{b\alpha}^c)\omega^e + \left(\Gamma_{b\beta}^{ae}\Lambda_\alpha^{\beta c} - \delta_b^a\Gamma_\alpha^{ec} - \delta_b^e\Gamma_\alpha^{ac}\right)\omega_e +$$

$$+\delta_b^c\omega_\alpha^a - \delta_b^a\Lambda_\alpha^{\beta c}\omega_\beta \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_\alpha^{ab} - \Gamma_{e\alpha}^{ab}\omega^e + \Gamma_\beta^{ac}\Lambda_\alpha^{\beta b}\omega_c + \Lambda_\alpha^{\beta b}\omega_\beta^a \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{\alpha\beta}^{ab} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{ac}\Lambda_\beta^{\gamma b}\omega_c + \left(\delta_c^a\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \delta_\alpha^\gamma\Gamma_{c\beta}^{ab}\right)\omega_\gamma^c - \Gamma_\beta^{ab}\omega_\alpha +$$

$$+\Gamma_{\alpha\beta}^b\omega^a \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a} + \left(\Gamma_{\beta\mu}^{\alpha b}\Lambda_\gamma^{\mu a} - \delta_\beta^\alpha\Gamma_\gamma^{ba}\right)\omega_b + \delta_\beta^\alpha\Gamma_{b\gamma}^a\omega^b -$$

$$-\left(\delta_\beta^\mu\Lambda_\gamma^{\alpha a} + \delta_\beta^\alpha\Lambda_\gamma^{\mu a}\right)\omega_\mu - \delta_\gamma^\alpha\omega_\beta^a \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{a\alpha}^b + \left(\Gamma_{a\alpha}^{cb} + \Gamma_{a\beta}^c\Lambda_\alpha^{\beta b}\right)\omega_c + \delta_a^b\omega_\alpha \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{\alpha\beta}^a + \left(\Gamma_{\alpha\gamma}^b\Lambda_\beta^{\gamma a} + \Gamma_{\alpha\beta}^{ba}\right)\omega_b - \Gamma_{b\beta}^a\omega_\alpha^b + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma a}\omega_\gamma \equiv 0.$$

Осуществляя расширенное композиционное оснащение ко-конгруэнции $K_{(n-m)m}$, присоединив к каждой $m$-мерной плоскости $L_m$ аналог плоскости Картана — плоскость $C_{n-m-1}$, не имеющую общих точек с плоскостью $L_m$, и точку $C \in L_m$, причем

$$C = A + \lambda^a A_a,\ C_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha A,$$

получим дифференциальные уравнения компонент оснащающего квазитензора $\lambda = \{\lambda^a,\ \lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha\}$

$$\begin{gathered}\Delta\lambda^a - \lambda^a\lambda^b\omega_b + \omega^a = \lambda^{ab}_\alpha\omega^\alpha_b,\\ \Delta\lambda^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a + \omega^a_\alpha = \lambda^{ab}_{\alpha\beta}\omega^\beta_b,\\ \Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha = \lambda^a_{\alpha\beta}\omega^\beta_a,\end{gathered} \tag{3}$$

причем

$$\Delta\lambda^{ab}_\alpha + F^{\beta b}_\alpha\omega^a_\beta - \lambda^a F^{\beta b}_\alpha\omega_\beta + \left(\Lambda^{\beta b}_\alpha\lambda^{ac}_\beta - \lambda^{ab}_\alpha\lambda^c - \lambda^{cb}_\alpha\lambda^a\right)\omega_c \equiv 0,$$

$$\begin{gathered}\Delta\lambda^a_{\alpha\beta} + \lambda_\beta\omega^a_\alpha + \left(\Lambda^{\gamma a}_\beta\lambda^b_{\alpha\gamma} + \lambda^{ba}_{\alpha\beta}\right)\omega_b +\\ + \left(-M^{\gamma a}_{\alpha\beta} + \delta^\gamma_\alpha\Lambda^{\mu a}_\beta\lambda_\mu\right)\omega_\gamma \equiv 0,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\Delta\lambda^{ab}_{\alpha\beta} + \left(-\delta^a_c M^{\gamma b}_{\alpha\beta} + \delta^b_c\delta^\gamma_\alpha\lambda^a_\beta\right)\omega^c_\gamma + \Lambda^{\gamma b}_\beta\lambda^a_\gamma\omega_\alpha + \Lambda^{\gamma b}_\beta\lambda^{ac}_{\alpha\gamma}\omega_c +\\ +\lambda^b_{\alpha\beta}\omega^a \equiv 0,\end{gathered}$$

где $F^{\beta b}_\alpha = \Lambda^{\beta b}_\alpha + \delta^\beta_\alpha\lambda^b$,$M^{\alpha a}_{\beta\gamma} = -\left(\delta^\alpha_\gamma\lambda^a_\beta + \Lambda^{\alpha a}_\gamma\lambda_\beta\right)$.

Данное расширенное композиционное оснащение позволяет охватить компоненты объекта связности следующим образом:

$$\begin{gathered}\overset{0}{\Gamma}{}^b_{a\alpha} = \delta^b_a\lambda_\alpha,\\ \overset{0}{\Gamma}{}^{ac}_{b\alpha} = \delta^c_b\lambda^a_\alpha - \delta^a_b\Lambda^{\beta c}_\alpha\lambda_\beta,\\ \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma} = M^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^\alpha_\beta\Lambda^{\mu a}_\gamma\lambda_\mu,\\ \overset{01}{\Gamma}{}^{ab}_\alpha = \Lambda^{\beta b}_\alpha\lambda^a_\beta,\\ \overset{01}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = \lambda^a_\gamma M^{\gamma b}_{\alpha\beta},\\ \overset{01}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta} = \lambda_\gamma M^{\gamma a}_{\alpha\beta}.\end{gathered}$$

Ковариантные дифференциалы

$$\nabla\lambda^a = d\lambda^a + \lambda^b\widetilde{\omega}_b^a - \lambda^a\lambda^b\widetilde{\omega}_b + \widetilde{\omega}^a,$$

$$\nabla\lambda_\alpha^a = d\lambda_\alpha^a + \lambda_\alpha^b\widetilde{\omega}_b^a - \lambda_\beta^a\widetilde{\omega}_\alpha^\beta + \lambda_\alpha\widetilde{\omega}^a + \widetilde{\omega}_\alpha^a,$$

$$\nabla\lambda_\alpha = d\lambda_\alpha - \lambda_\beta\widetilde{\omega}_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^a\widetilde{\omega}_a + \widetilde{\omega}_\alpha$$

выражаются через ковариантные производные

$$\nabla_\alpha^b\lambda^a = \lambda_\alpha^{ab} - \lambda^c\Gamma_{c\alpha}^{ab} + \lambda^a\lambda^c\Gamma_{c\alpha}^b - \Gamma_\alpha^{ab},$$

$$\nabla_\beta^b\lambda_\alpha^a = \lambda_{\alpha\beta}^{ab} - \lambda_\alpha^c\Gamma_{c\beta}^{ab} + \lambda_\gamma^a\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \lambda_\alpha\Gamma_\beta^{ab} - \Gamma_{\alpha\beta}^{ab},$$

$$\nabla_\beta^a\lambda_\alpha = \lambda_{\alpha\beta}^a + \lambda_\gamma\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma a} - \lambda_\alpha^b\Gamma_{b\beta}^a - \Gamma_{\alpha\beta}^a$$

следующим образом:

$$\nabla\lambda^a = \nabla_\alpha^b\lambda^a\omega_b^\alpha, \quad \nabla\lambda_\alpha^a = \nabla_\beta^b\lambda_\alpha^a\omega_b^\beta, \nabla\lambda_\alpha = \nabla_\beta^a\lambda_\alpha\omega_b^\beta.$$

С использованием тензорности ковариантных производных

$$\Delta\nabla_\alpha^b\lambda^a + \left(\Lambda_\alpha^{\beta b}\nabla_\beta^c\lambda^a - \lambda^a\nabla_\alpha^b\lambda^c - \lambda^c\nabla_\alpha^b\lambda^a\right)\omega_c \equiv 0,$$

$$\Delta\nabla_\beta^b\lambda_\alpha^a + \nabla_\beta^b\lambda_\alpha\omega^a + \Lambda_\beta^{\gamma b}\nabla_\gamma^c\lambda_\alpha^a\omega_c \equiv 0,$$

$$\Delta\nabla_\beta^a\lambda_\alpha + \left(\nabla_\beta^a\lambda_\alpha^b + \Lambda_\beta^{\gamma a}\nabla_\gamma^b\lambda_\alpha\right)\omega_b \equiv 0$$

строится второй охват:

$$\overset{02}{\Gamma}{}_\alpha^{ab} = \lambda_\alpha^{ab} + \Lambda_\alpha^{\beta b}\lambda_\beta\lambda^a - \lambda^b\mu_\alpha^a,$$

$$\overset{02}{\Gamma}{}_{\alpha\beta}^{ab} = \lambda_{\alpha\beta}^{ab} - \lambda_\alpha\lambda_\beta^{ab} - 2\lambda_\beta^a\lambda_\alpha^b - \Lambda_\beta^{\gamma b}\lambda_\alpha(\lambda_\gamma^a + \lambda_\gamma\lambda^\alpha) + \lambda_\alpha\lambda^b\mu_\beta^a,$$

$$\overset{02}{\Gamma}{}_{\alpha\beta}^{a} = \lambda_{\alpha\beta}^a + 2M_{\alpha\beta}^{\gamma a}\lambda_\gamma,$$

где $\mu_\alpha^a = \lambda_\alpha^a - \lambda^a\lambda_\alpha$.

По аналогии с работой [13] третий охват находится так, чтобы первая связность являлась средней [9] по отношению к двум другим, то есть

$$\overset{01}{\Gamma} = \frac{1}{2}\left(\overset{02}{\Gamma} + \overset{03}{\Gamma}\right).$$

Таким образом,

$$\overset{03}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha} = -\lambda^{ab}_{\alpha} + \Lambda^{\beta b}_{\alpha}\left(\lambda^{a}_{\beta} + \mu^{a}_{\beta}\right) + \lambda^{b}\mu^{a}_{\alpha},$$

$$\overset{03}{\Gamma}{}^{ab}_{\alpha\beta} = -\lambda^{ab}_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha}\lambda^{ab}_{\beta} - \Lambda^{\gamma b}_{\beta}\lambda_{\alpha}\mu^{a}_{\gamma} - \lambda_{\alpha}\lambda^{b}\mu^{a}_{\beta},$$

$$\overset{03}{\Gamma}{}^{a}_{\alpha\beta} = -\lambda^{a}_{\alpha\beta}.$$

***Замечание.*** Для построения первого охвата было бы достаточно рассмотреть не расширенное композиционное оснащение, а оснащение, заданное аналогом плоскости Картана. Для остальных двух охватов одной плоскости Картана было бы недостаточно.

Введем объект деформации $\sigma$ связности второго типа по отношению к связности первого типа, то есть $\sigma = \overset{02}{\Gamma} - \overset{01}{\Gamma}$.

***Замечание.*** Деформация связности третьего типа по отношению к связности первого типа равна $-\sigma$, а деформация связности третьего типа по отношению к связности второго типа равна $-2\sigma$.

Компоненты объекта деформации $\sigma = \{\sigma^{ab}_{\alpha}, \sigma^{ab}_{\alpha\beta}, \sigma^{a}_{\alpha\beta}\}$ имеют вид

$$\sigma^{ab}_{\alpha} = \lambda^{ab}_{\alpha} - \Lambda^{\beta b}_{\alpha}\mu^{a}_{\beta} - \lambda^{b}\mu^{a}_{\alpha},$$

$$\sigma^{ab}_{\alpha\beta} = \lambda^{ab}_{\alpha\beta} - \lambda^{ab}_{\beta}\lambda_{\alpha} - \lambda^{b}_{\alpha}\lambda^{a}_{\beta} - \Lambda^{\gamma b}_{\beta}\lambda_{\alpha}\lambda_{\gamma}\lambda^{a} + \lambda_{\alpha}\lambda^{b}\mu^{a}_{\beta},$$

$$\sigma^{a}_{\alpha\beta} = \lambda^{a}_{\alpha\beta} + \mathrm{M}^{\gamma a}_{\alpha\beta}\lambda_{\gamma}.$$

Находим дифференциальные сравнения этих компонент, учитывая сравнения (3), (4):

$$\Delta\sigma^{ab}_{\alpha} + \left(\Lambda^{\beta b}_{\alpha}\sigma^{ac}_{\beta} - \lambda^{a}\sigma^{cb}_{\alpha} - \lambda^{c}\sigma^{ab}_{\alpha}\right)\omega_{c} \equiv 0,$$

$$\Delta\sigma_{\alpha\beta}^{ab} + \sigma_{\alpha\beta}^{b}\omega^{a} + \left(\Lambda_{\beta}^{\gamma b}\sigma_{\alpha\gamma}^{ac} - \mu_{\alpha}^{c}\sigma_{\beta}^{ab} + \lambda^{a}\lambda_{\alpha}\sigma_{\beta}^{cb}\right)\omega_{c} -$$
$$-\sigma_{\beta}^{ab}\omega_{\alpha} \equiv 0,$$
$$\Delta\sigma_{\alpha\beta}^{a} + (\sigma_{\alpha\beta}^{ba} + \Lambda_{\beta}^{\gamma a}\sigma_{\alpha\gamma}^{b} + \lambda_{\alpha}\sigma_{\beta}^{ba})\omega_{b} \equiv 0.$$

В полученных дифференциальных сравнениях у компонент объекта деформации стоят множители (компоненты фундаментального объекта 1-го порядка $\Lambda$ и оснащающего квазитензора $\lambda$), поэтому справедлива следующая теорема.

**Теорема.** *Объект деформации $\sigma$ связности является псевдотензором [10], то есть объектом, обращение которого в нуль инвариантно.*

### *Список литературы*


1. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Эли Картан (1869—1951). М., 2014.

2. *Белова О.О.* Дифференциальная геометрия $(n-m)m$-мерных комплексов в $n$-мерном проективном пространстве // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2023. Т. 220. С. 17—27.

3. *Близникас В.И.* Некоторые вопросы геометрии гиперкомплексов прямых // Труды Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 43—111.

4. *Борисенко А.А., Николаевский Ю.А.* Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий // УМН. 1991. Т. 46, вып. 2 (278). С. 41—83.

5. *Гусева О.О.* Прямолинейные конгруэнции с вырождающейся в линию фокальной поверхностью // ДГМФ. 1993. Вып. 24. С. 46—48.

6. *Гусева О.О.* Специальные классы конгруэнций с вырождающейся в линию фокальной поверхностью // ДГМФ. 1994. Вып. 25. С. 37—41.

7. *Кругляков Л.З.* О некоторых комплексах многомерных плоскостей в проективном пространстве // Функциональный анализ и его приложения. 1982. Т. 16, вып. 3. С. 66—67.

8. *Полякова К.В., Шевченко Ю.И.* Способ Лаптева — Лумисте задания связности и горизонтальные векторы // ДГМФ. 2012. Вып. 43. С. 114—121.

9. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

10. *Шевченко Ю.И.* Связность в продолжении главного расслоения // ДГМФ. 1991. Вып. 22. С. 117—127.

11. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. 2006. Вып. 37. С. 179—187.

12. *Akivis M. A., Shelekhov A. M.* Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs // J. Math. Sci. 2011. Vol. 177, №4. P. 522—540.

13. *Belova O. O.* Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planes // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, №5. P. 605—632.

14. *Belova O.* Generalized affine connections associated with the space of centered planes // Maths. MDPI. 2021. Vol. 9 (7), №782.

15. *Mansouri A.-R.* An extension of Cartan's method of equivalence to immersions: I. Necessary conditions // Differential Geometry and its Applications. 2009. №27. P. 635—646.

16. *Polyakova K. V.* Parallel displacements on the surface of a projective space // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, №5. P. 675—709.

17. *Rahula M.* The G.F. Laptev method: fundamental objects of mappings // J. Math. Sci. 2011. Vol. 174. P. 675—697.

18. *Scholz E.* H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal, 2010.

**Для цитирования:** *Белова О.О.* Псевдотензор деформации связностей коконгруэнции $K_{(n-m)m}$ // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 39—48. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-5.



MSC 2010: 58A05, 53A20, 53A35

*O. O. Belova*
*Immanuel Kant Baltic Federal University*
*14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236041, Russia*
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2023-54-1-5

## The deformation pseudotensor of connections in cocongruence $K_{(n-m)m}$

Submitted on December 15, 2022

The Grassmann manifold $G(m,n)$ is the set of all $m$-dimensional planes of an $n$-dimensional projective space, with

$$\dim G(m,n) = (n-m)(m+1).$$

One of the submanifolds of the Grassmann manifold is a complex of $m$-planes if the dimension of the complex exceeds the difference $n-m$.

We continue to study the cocongruence of $m$-dimensional planes using the Cartan — Laptev method. In an $n$-dimensional projective space, the cocongruence of $m$-dimensional planes can be given by the following equations $\omega^\alpha = \Lambda^{\alpha a}_\beta \omega^\beta_a$.

Compositional equipment of a given cocongruence by fields of

$$(n-m-1)\text{-planes } C_{n-m-1}{:}L_m \oplus C_{n-m-1} = P_n$$

$$\text{and points } C = A + \lambda^a A_a$$

allows one to define connections of three types in the associated bundle, and one of the three connections is average with respect to the other two. The deformation of these connections is considered and it is shown that the object of deformation is a pseudotensor.

We introduce the deformation object $\sigma$ of the connection of the second type with respect to the connection of the first type. The deformation of the connection of the third type with respect to the connection of the first type is $-\sigma$, and the deformation of the connection of the third type with respect to the connection of the second type is $-2\sigma$.

In the present paper, we use the method of continuations and coverages of G.F. Laptev with assignment of connections in the principal bundle.

*Keywords:* projective space, cocongruence of $m$-dimensional planes, connection, deformation of connection

*References*

1. *Akivis, M.A., Rosenfeld, B.A.:* Eli Cartan (1869—1951). Moscow (2014).

2. *Belova, O.O.:* Differential geometry of (*n*-*m*)*m*-dimensional complexes in *n*-dimensional projective space // Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews, 220, 17—27 (2023).

3. *Bliznikas, V.I.:* Some problems in the geometry of hypercomplexes of lines // Tr. Geom. Sem. 6, 43—111 (1974).

4. *Borisenko, A.A., Nikolaevskii, Yu.A.:* Grassmann manifolds and the Grassmann image of submanifolds. Russian Math. Surveys, **46**:2, 45—94 (1991).

5. *Guseva, O. O.:* Rectilinear congruences with a focal surface degenerating into a line. DGMF, 24, 46—48 (1993).

6. *Guseva, O. O.:* Special classes of congruences with focal surface degenerating into a line. DGMF, 25, 37—41 (1994).

7. *Kruglyakov, L. Z.:* On some complexes of multidimensional planes in projective space // Functional analysis and its applications. **16**:3, 66—67 (1982).

8. *Polyakova, K. V., Shevchenko, Yu. I.:* Laptev — Lumiste′s methods of giving connection and geometrical vectors. DGMF, 43, 114—121 (2012).

9. *Norden, A. P.:* Spaces with affine connection. Moscow (1976).

10. *Shevchenko, Yu. I.:* Connection in continuation of a principal bundle. DGMF, 22, 117—127 (1991).

11. *Shevchenko, Yu. I.:* Laptev's and Lumiste's tricks for specifying a connection in a principal bundle. DGMF, 37, 179—187 (2006).

12. *Akivis, M. A., Shelekhov, A. M.:* Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs. J. Math. Sci., 177, 522 (2011).

13. *Belova, O. O.:* Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planes. J. Math. Sci., **162**:5, 605—632 (2009).

14. *Belova, O.:* Generalized affine connections associated with the space of centered planes. Maths. MDPI, 9 (7), 782 (2021).

15. *Mansouri, A.-R.:* An extension of Cartan's method of equivalence to immersions: I. Necessary conditions. Diff. Geom. and its App., 27, 635—646 (2009).

16. *Polyakova, K. V.:* Parallel displacements on the surface of a projective space. J. Math. Sci., **162**:5, 675—709 (2009).

17. *Rahula, M.:* The G. F. Laptev method: fundamental objects of mappings. J. Math. Sci., 174, 675—697 (2011).

18. *Scholz, E.:* H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal (2010).

**For citation:** Belova, O. O. The deformation pseudotensor of connections in cocongruence $K_{(n-m)m}$. DGMF, 54 (1), 39—48 (2023). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2023-54-1-5.