Т е о р е м а 7. Поверхность (A) конгруэнции (F_1) пары P_ℓ^2 является строенной фокальной поверхностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая (3.13) и (3.9), уравнения (1.7) примут вид :

$$(x^2)^2 - 2x^1 = 0, \quad x^3 = 0,$$
$$(x^2)^3 \{ (2m+3)x^2 - 2(ab+\beta+2n) \} = 0,$$

что и доказывает теорему.

Л и т е р а т у р а .

1. В.С.Малаховский, Конгруэнции парабол в эквиаффинной геометрии. Труды Томского университета. Томск, 1962.

2. С.П.Фиников, Метод внешних форм Картана. ГИТТЛ, Москва, 1948г.

3. С.П.Фиников, Теория конгруэнций. ГИТТЛ, Москва, 1950г.

4. С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, Москва, 1956г.

5. Р.Н.Щербаков, Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Издательство Томского университета. Томск, 1960г.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.

Ф.А.ЛИПАТОВА .

КОНГРУЭНЦИИ ПАР ФИГУР В ТРЕХМЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ОБРАЗОВАННЫЕ ЭЛЛИПСОМ И ТОЧКОЙ.

В трехмерном аффинном пространстве A_3 исследуются конгруэнции K пар фигур, образованные эллипсом C и точкой M, не инцидентной плоскости эллипса C .

§ 1. Система дифференциальных уравнений конгруэнции K .

Отнесем конгруэнцию K к реперу $R \equiv \{A, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, где A -центр эллипса C, концы A_1, A_2 векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ -его фокальные точки, не принадлежащие одному диаметру, и $\bar{e}_3 = \overline{AM}$. Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$d\bar{A} = \omega^i \bar{e}_i , \quad d\bar{e}_i = \omega_i^j \bar{e}_j , \tag{1.1}$$

где формы Пфаффа ω^i , ω_i^j удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства

$$\mathfrak{D}\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i , \quad \mathfrak{D}\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j . \tag{1.2}$$

Уравнения эллипса C относительно репера R имеют вид:

$$(x^1)^2 + 2\lambda x^1 x^2 + (x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0, \quad |\lambda| < 1 \tag{1.3}$$

Фокальные поверхности и фокальные семейства конгруэнции (C) определяются из системы уравнений [1] :

$$\left.\begin{aligned} &(x^1)^2 + 2\lambda x^1 x^2 + (x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0, \\ &(\omega_1^1 + \lambda\omega_1^2)(x^1)^2 + (\omega_2^2 + \lambda\omega_2^1)(x^2)^2 + [-d\lambda + \omega_1^2 + \omega_2^1 + \lambda(\omega_1^1 + \omega_2^2)]\, x^1 x^2 + \\ &+ (\omega^1 + \lambda\omega^2)x^1 + (\omega^2 + \lambda\omega^1)x^2 = 0, \quad x^1\omega_1^3 + x^2\omega_2^3 + \omega^3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Так как координаты фокальных точек $A_1(1,0,0)$ и $A_2(0,1,0)$ удовлетворяют системе уравнений (1.4), то

$$\omega_1^1 + \omega^1 + \lambda(\omega_1^2 + \omega^2) = \alpha(\omega_1^3 + \omega^3), \tag{1.5}$$

$$\omega_2^2 + \omega^2 + \lambda(\omega_2^1 + \omega^1) = \beta(\omega_2^3 + \omega^3). \tag{1.6}$$

Исключая из рассмотрения случай параллельности вектора $\bar{e}_3$ касательной плоскости к поверхности (A), примем формы Пфаффа ω^1 и ω^2 за независимые.

Система дифференциальных уравнений конгруэнции K запишется в виде:

$$\begin{gathered}
\omega^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \quad \omega_1^2 = c\omega^1 + f\omega^2, \quad \omega_2^1 = e\omega^1 + h\omega^2, \\
\omega_1^3 = n\omega^1 + m\omega^2, \quad \omega_2^3 = p\omega^1 + k\omega^2, \quad \omega_3^3 = s\omega^1 + t\omega^2, \\
\omega_3^1 = q\omega^1 + r\omega^2, \quad \omega_3^2 = m_1\omega^1 + m_2\omega^2, \quad d\lambda = \lambda_1\omega^1 + \lambda_2\omega^2, \\
\omega_1^1 = \alpha(\omega_1^3 + \omega^3) - \omega^1 - \lambda(\omega_1^2 + \omega^2), \quad \omega_2^2 = \beta(\omega_2^3 + \omega^3) - \omega^2 - \lambda(\omega_2^1 + \omega^1).
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (1.7), получим:

$$\begin{gathered}
da\wedge\omega^1 + db\wedge\omega^2 + n_1\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \quad dc\wedge\omega^1 + df\wedge\omega^2 + n_2\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \\
de\wedge\omega^1 + dh\wedge\omega^2 + n_3\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \quad dn\wedge\omega^1 + dm\wedge\omega^3 + n_4\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \\
dp\wedge\omega^1 + dk\wedge\omega^2 + n_5\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \quad ds\wedge\omega^1 + dt\wedge\omega^2 + n_6\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \\
dq\wedge\omega^1 + dr\wedge\omega^2 + n_7\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \quad dm_1\wedge\omega^1 + dm_2\wedge\omega^2 + n_8\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \\
d\lambda_1\wedge\omega^1 + d\lambda_2\wedge\omega^2 + n_9\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \quad (a+n)d\alpha\wedge\omega^1 + (b+m)d\alpha\wedge\omega^2 + n_{10}\omega^1\wedge\omega^2 = 0, \\
(p+a)d\beta\wedge\omega^1 + (b+k)d\beta\wedge\omega^2 + n_{11}\omega^1\wedge\omega^2 = 0,
\end{gathered} \tag{1.8}$$

где

$$\begin{aligned}
n_1 &= a[\alpha(b+m) - \lambda(1+f) - e + ar - bq - t] - b[\beta(p+a) - \\
&\quad - \lambda(1+e) - am_2 + bm_1 - f - s] - m + p, \\
n_2 &= c[2\alpha(b+m) - \lambda(1+f) - \beta(k+b) + \lambda h - e + ar - bq + 1] - \\
&\quad - \lambda c(1+e) - f[\alpha(a+n) - \lambda c - am_2 + bm_1 - f - 1] - nm_2 + mm_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_3 &= e[\beta(b+k) - \lambda h + ar - bq - e - 1] - h[2\beta(p+a) - 2\lambda(1+e) - \\
&\quad - \alpha(a+n) + \lambda c - am_2 + bm_1 - f + 1] - pr + kq, \\
n_4 &= n[2\alpha(b+m) - 2\lambda(1+f) + ar - bq - e - t] - m[\beta(p+a) - \\
&\quad - \lambda(1+e) + \alpha(a+m) - \lambda c - am_2 + bm_1 - f + s - 1] - ck + pf, \\
n_5 &= p[\alpha(b+m) - \lambda(1+f) + \beta(b+k) - \lambda h + ar - bq - e - t - 1] - \\
&\quad - k[2\beta(p+a) - 2\lambda(1+e) - am_2 + bm_1 - f - s] - em + hn, \\
n_6 &= s[\alpha(b+m) - \lambda(1+f) + ar - bq - e] - t[\beta(p+a) - \lambda(1+e) - \\
&\quad - am_2 + bm_1 - f] - mq + rn - m_1k + pm_2, \\
n_7 &= q(ar - bq - e) - r[\beta(p+a) - \lambda(1+e) - \alpha(a+n) + 1 - \lambda c - \\
&\quad - am_2 + bm_1 - f + s] - m_1h + em_2 + tq, \\
n_8 &= m_1[\alpha(b+m) - \lambda(1+f) - \beta(b+k) + \lambda h - e + ar - bq + t] - \\
&\quad - m_2(bm_1 - am_2 - f + s) - tq + cr, \\
n_9 &= \lambda_1[\alpha(b+m) - \lambda(1+f) - e + ar - bq] - \lambda_2[\beta(p+a) - \\
&\quad - \lambda(1+e) - am_2 + bm_1 - f], \\
n_{10} &= \alpha\{m[\alpha(a+n) - \lambda c - 1] - n[\alpha(b+m) - \lambda(1+f)] + ck - pf + \\
&\quad + nt - ms + m - p + at - bs\} + \lambda\{f[\alpha(a+n) - 1 - \lambda c - \beta(p+a) + \\
&\quad + \lambda(1+e) - c[\alpha(b+m) - \lambda(1+f) - \beta(b+k) + \lambda h + 1] + nm_2 - \\
&\quad - mm_1 - \beta(p+a) + \lambda(1+e) + am_2 - bm_1 + f\} - \lambda_1(1+f) + c\lambda_2 - \\
&\quad - \alpha(b+m) + \lambda(1+f) + e - ar - bq - ch + ef - nr + mq, \\
n_{11} &= \beta\{k[\beta(a+p) - \lambda(1+e)] - p[\beta(b+k) - \lambda h - 1] + em - hn + pt - \\
&\quad - ks + m - p + at - bs\} - \lambda\{e[\alpha(b+m) - \lambda(1+f) + \beta(b+k) + \\
&\quad + \lambda h + 1] - h[\alpha(a+n) - \lambda c - 1 - \beta(p+a) + \lambda(1+e)] + pr - \\
&\quad - kq + \alpha(b+m) - \lambda(1+f) - e - ar - bq\} + \beta(p+a) - \lambda(1+e) - \\
&\quad - m_2(a+p) + m_1(b+k) - f(1+e) + ch - \lambda_1 h + \lambda_2(1+e).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Из уравнений (I.7),(I.8) заключаем, что конгруэнции K существуют и определяются с произволом девяти функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнции K, для которых

$$\lambda = 0 \qquad (1.10)$$

называются конгруэнциями K_0.

Для конгруэнции K_0 система (I.7) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\omega^3 = a\omega^1 + b\omega^2, \quad \omega_1^2 = c\omega^1 + f\omega^2, \quad \omega_2^1 = e\omega^1 + h\omega^2,\\
&\omega_1^3 = n\omega^1 + m\omega^2, \quad \omega_2^3 = p\omega^1 + k\omega^2, \quad \omega_3^3 = s\omega^1 + t\omega^2,\\
&\omega_1^1 = \alpha(\omega_1^3 + \omega^3) - \omega^1, \quad \omega_2^2 = \beta(\omega_2^3 + \omega^3) - \omega^2,\\
&\omega_3^2 = m_1\omega^1 + m_2\omega^2, \quad \omega_3^1 = q\omega^1 + r\omega^2.
\end{aligned} \qquad (1.11)$$

Отсюда непосредственно следует, что конгруэнции K_0 определяются с произволом восьми функций двух аргументов. Они характеризуются сопряженностью векторов $\bar e_1, \bar e_2$ относительно эллипса C.

§ 2. Основные геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией K.

1. Касательная плоскость к поверхности A. Она определяется векторами

$$\bar E_1 = \bar e_1 + a\bar e_2, \; \bar E_2 = \bar e_2 + b\bar e_3. \qquad (2.1)$$

2. Касательная плоскость к поверхности (M). Она определяется векторами

$$\bar E_1^* = (1+q)\bar e_1 + m_1\bar e_2 + (a+s)\bar e_3, \; \bar E_2^* = r\bar e_1 + (1+m_2)\bar e_2 + (b+t)\bar e_3. \qquad (2.2)$$

3. Фокусы $\bar F = \bar A + t\bar e_3$ и торсы прямолинейной конгруэнции AM, определяемые соответственно уравнениями:

$$t^2(m_2 q - m_1 r) + (m_2 + q)t + 1 = 0, \qquad (2.3)$$

$$m_1(\omega^1)^2 + (m_2 - q)\omega^1\omega^2 - r(\omega^2)^2 = 0. \qquad (2.4)$$

4. Фокусы $\bar F^* = \bar A + t\bar e_1$ и торсы прямолинейной конгруэнции $(A\bar e$

определяемые уравнениями:

$$t^2(cm - fn) + t(cb - af - n) - a = 0 \qquad (2.5)$$

$$ac(\omega^1)^2 + (af + bc - n)\omega^1\omega^2 + (bf - m)(\omega^2)^2 = 0. \qquad (2.6)$$

5. Характеристические точки $\bar L, \bar M, \bar N$ граней $\{A, \bar e_1, \bar e_2\}$, $\{A, \bar e_1, \bar e_2\}$, $\{A, \bar e_2, \bar e_3\}$:

$$\bar L = \bar A + \frac{m_1}{cm_2 - fm_1}\bar e_1 + \frac{c}{m_1 f - cm_2}\bar e_3, \qquad (2.7)$$

$$\bar M = \bar A + \frac{bp - ak}{nk - pm}\bar e_1 + \frac{am - bn}{nk - pm}\bar e_2, \qquad (2.8)$$

$$\bar N = \bar A + \frac{r}{hq - er}\bar e_2 + \frac{h}{er - hq}\bar e_3. \qquad (2.9)$$

§ 3. Индуцированно расслояемые конгруэнции K_0.

Обозначим буквой ℓ касательную к эллипсу C в точке A_1.

О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнции K_0 называются индуцированно расслояемыми, если прямолинейные конгруэнции (AM) и $(\ell$ образуют двусторонне расслояемую пару [4].

Т е о р е м а I. Индуцированно расслояемые конгруэнции K существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия двусторонней расслояемости прямолинейных конгруэнций (AM) и (ℓ) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&b + m - p = 0, \quad h + pr - kq = 0, \quad (m_2 - \alpha)(a+n) - (b+m)m_1 = 0,\\
&q(b+m) - r(a+n) - e = 0, \quad \alpha(b+m) + m_1 k - p m_2 = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

Система (I.II),(3.I) определяет индуцированно расслояемые конгруэнции K_0 с произволом трех функций двух аргументов.

Рассмотрим некоторые подклассы индуцированно расслояемых конгруэнций K_0.

О п р е д е л е н и е 3. Конгруэнцией K_0' называется конгруэнция K_0, у которой поверхность (A) огибает плоскости эллипсов и сеть линий $\omega^1\omega^2 = 0$ сопряжена на (A).

Из определения конгруэнции K'_0 следует, что

$$a = b = m = p = 0. \qquad (3.2)$$

В силу соотношений (3.2) система (3.I) принимает вид:

$$h = kq, \quad n(m_2 - \alpha) = 0, \quad rn - e = 0, \quad m_1 k = 0. \qquad (3.3)$$

При исследовании системы (3.3) обнаруживаем, что возможны следующие случаи:

$$k = 0, \ n = 0; \qquad (1)$$
$$k = 0, \ m_2 = \alpha; \qquad (2)$$
$$m_1 = 0, \ n = 0; \qquad (3)$$
$$m_1 = 0, \ m_2 = \alpha. \qquad (4)$$

О п р е д е л е н и е 4. Конгруэнции K'_0, характеризуемые соотношениями (i), называются конгруэнциями $K'_{0,i}$ (i = I,2,3,4).

Т е о р е м а 2. Существуют четыре класса конгруэнций K'_0 -конгруэнции $K'_{0,i}$ (i = I,2,3,4), причем конгруэнции $K'_{0,1}$, $K'_{0,2}$ определяются с произволом трех функций двух аргументов, а конгруэнции $K'_{0,3}$, не являющиеся конгруэнциями $K'_{0,1}$, - с произволом двух функций двух аргументов, $K'_{0,4}$ - с произволом одной функции двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя (I), (3.2), (3.3) в (I.II) получим:

$$\left.\begin{aligned} &\omega^3 = 0, \ \omega_1^3 = 0, \ \omega_2^3 = 0, \ \omega_1^1 + \omega^1 = 0, \ \omega_2^1 = 0, \\ &\omega_1^2 = c\omega^1, \ \omega_2^2 + \omega^2 = 0, \ \omega_3^1 = q\omega^1 + r\omega^2, \\ &\omega_3^2 = m_1\omega^1 + m_2\omega^2, \quad \omega_3^3 = s\omega^1 + t\omega^2. \end{aligned}\right. \qquad (3.4)$$

Замыкая систему (3.4), убеждаемся, что она имеет решение с произволом трех функций двух аргументов.

В силу соотношений (2),(3.2),(3.3) система (I.II) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\omega^3 = 0, \ \omega_1^3 = n\omega^1, \ \omega_2^3 = 0, \ \omega_1^1 = \alpha\omega_1^3 - \omega^1, \\ &\omega_2^2 + \omega^2 = 0, \ \omega_1^2 = c\omega^1 + f\omega^2, \ \omega_2^1 = -rn\,\omega^1, \ \omega_3^1 = q\omega^1 + r\omega^2, \\ &\omega_3^2 = m_1\omega^1 + \alpha\omega^2, \ \omega_3^3 = s\omega^1 + t\omega^2, \ f(rn - 1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

Замыкая систему (3.5) убеждаемся, что при $f = 0$ она имеет решение с произволом одной функции двух аргументов, а при $rn = 1$ — с произволом трех функций двух аргументов.

При исследовании системы уравнений, определяющей конгруэнции $K'_{0,3}$ выделяются два подкласса. Подкласс $c = 0$, определяемый системой

$$\left.\begin{aligned} &\omega^3 = 0, \ \omega_1^2 = f\omega^2, \ \omega_2^1 = kq\omega^2, \ \omega_1^3 = 0, \\ &\omega_2^3 = k\omega^2, \ \omega_3^3 = s\omega^1 + t\omega^2, \ \omega_3^1 = q\omega^1 + r\omega^2, \\ &\omega_3^2 = m_2\omega_1^2, \ \omega_1^1 + \omega^1 = 0, \ \omega_2^2 = \alpha\omega_2^3 - \omega^2, \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

с произволом одной функции двух аргументов и подкласс $k = 0$, определяемый с произволом двух функций двух аргументов и входящий в класс $K'_{0,1}$.

Рассматривая систему (I.II),(3.2),(3.3),(4) убеждаемся, что конгруэнции $K'_{0,4}$ определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а 3. Поверхность (A) конгруэнции $K'_{0,1}$ является плоскостью, которой принадлежат все коники конгруэнции C.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (3.4) последнее уравнение системы (I,4) тождественно удовлетворяется. Следовательно все коники конгруэнции инцидентны одной плоскости $x^3 = 0$.

Т е о р е м а 4. Точки $A_1(1,0,0)$, $A_2(0,1,0)$, $A_1^*(-1,0,0)$ конгруэнции $K'_{0,1}$ суть характеристические точки эллипса вдоль направления $\omega^1 = 0$, причем A_1^* —сдвоенная характеристическая точка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя (I.IO),(3.4) и $\omega^1 = 0$ в систему (I.4), получим:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \quad x^3 = 0, \quad (x^2)^2 - x^2 = 0, \qquad (3.7)$$

откуда непосредственно следует, утверждение теоремы.

Т е о р е м а 5. Поверхность (A) конгруэнций $K'_{0,2}$ ($K'_{0,3}$) является торсом. Вдоль направлений $\omega^1 = 0$, ($\omega^2 = 0$) коники конгруэнции (C) инцидентны одной плоскости.

Доказательство. В силу (3.5) уравнение асимптотических линий поверхности (A) конгруэнции $K'_{0,2}$ ($K'_{0,3}$) принимает вид: $n(\omega^1)^2 = 0$, $\left(\kappa(\omega^2)^2 = 0\right)$.

Следовательно, поверхность (A)-торс. Так как при $\omega^1 = 0, (\omega^2 = 0)$ последнее уравнение системы (I.4) тождественно удовлетворяется, то теорема доказана.

Литература.

I. В.С.Малаховский, Канонический репер конгруэнции центральных кривых второго порядка в эквиаффинной геометрии, Томск, I962, Издательство Томского университета.

2. С.П.Фиников, Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, ГИТТЛ, М-Л, I948.

3. С.П.Фиников, Теория конгруэнций, ГИТТЛ, М-Л, I950.

4. С.П.Фиников, Теория пар конгруэнций, ГИТТЛ, М-Л, I948.

5. Р.Н.Щербаков, Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии, Томск, I960.

СЕМИНАР ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР ПРИ КАЛИНИНГРАДСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ.

Научный семинар при кафедре геометрии Калининградского государственного университета начал работу в январе I970 года. Ниже приводится перечень докладов, в которых сообщались результаты исследований участников семинара с января по май I970 года.

27.I.I970. В.С.Малаховский, Расслояемые пары C_ℓ .

I0.2.I970. В.С.Малаховский, Об одном классе конгруэнций коник в P_3 .

24.2.I970. Ю.И.Попов, Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n .

3.3.I970. Г.Л.Свешникова, Конгруэнции коник в P_3 с двумя вырождающимися фокальными поверхностями.

I0.3.I970. В.В.Махоркин, Некоторые типы конгруэнций коник в P_3 с плоскими фокальными поверхностями.

I7.3.I970. В.М.Овчинников, Дифференцируемое отображение пространства квадратичных элементов в точечное пространство.

24.3.I970. И.С.Кузнецова, Конгруэнция параболических цилиндров в E_3.

3I.3.I970. Ю.И.Шевченко, Конгруэнция парабол в трехмерном эквиаффинном пространстве с плоской фокальной поверхностью.

3I.3.I970 И.Н.Фетисова, Многообразие пар фигур в P_n , образованное гиперквадрикой и точкой.

7.4.I970 Б.А.Андреев, Об одном классе дифференцируемых отображений пространств пар фигур в точечные пространства.

I4.4.I970 В.П.Семенова, Конгруэнции прямых круговых цилиндров в E_3.

I4.4.I970 Т.П.Новожилова, Двупараметрическое семейство фигур,