ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987
УДК 514.75

ГЕОМЕТРИЯ ОДНОГО КЛАССА R-СЕТЕЙ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

М.К.К у з ь м и н
(Московский областной пединститут)

В статье изучается геометрия одного класса n-мерных R-сетей [4] евклидова пространства E_n. Сеть рассматриваемого класса характеризуется наличием на касательных к ее линиям $\left[\frac{n}{2}\right]$ пар псевдофокусов [1], [2] определенного вида. Выясняются геометрические свойства этого класса. Приводятся необходимые и достаточные условия голономности рассматриваемых R-сетей. Доказываются теоремы существования.

1. Пусть в собственно евклидовом пространстве E_n дана R-сеть Σ_n [4]. С каждой точкой $x \in E_n$ свяжем ортонормированный репер $(x, \bar{e}_i)$ $(i,j,k,\ell,m = 1,2,\ldots,n)$, построенный на касательных к линиям данной сети в точке x. Имеем деривационные формулы $d\bar{x} = \omega^i \bar{e}_i$, $d\bar{e}_i = \omega_i^k \bar{e}_k$, где пфаффовы формы ω_i^k удовлетворяют условиям

$$\omega_i^k + \omega_k^i = 0, \tag{1}$$

$$\omega_i^k \wedge \omega_j^k = 0, \tag{2}$$

причем из них формы ω_i^k $(i \neq k)$ являются главными [1]:

$$\omega_i^k = a_{ij}^k \omega^j. \tag{3}$$

В силу условий (1) функции a_{ij}^k удовлетворяют соотношениям

$$a_{ij}^k + a_{kj}^i = 0. \tag{1'}$$

2. Точку F_k^i $(i \neq k)$, определяемую радиусом-вектором $\bar{F}_k^i = \bar{x} - {}^1/_{a_{ki}^i}\, \bar{e}_k$, называют [1], [2] псевдофокусом касательной $[x, \bar{e}_k]$ к линии ω^k сети Σ_n.

О п р е д е л е н и е. Псевдофокус F_k^i назовем Δ_q-псевдофокусом, если существует распределение Δ_q такое, что при смещении точки x вдоль линий, принадлежащих Δ_q, смещение псевдофокуса параллельно плоскости $\pi_{n-1}^i(x) = [x, \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{i-1}, \bar{e}_{i+1}, \ldots, \bar{e}_n]$.

Заметим, что псевдофокус F_k^i всегда является $\Delta_1 = \Delta(\bar{e}_i)$-псевдофокусом. Легко видеть, что псевдофокус F_k^i является Δ_{n-1}^k-псевдофокусом тогда и только тогда, когда

$$a_{kj}^i = 0 \quad (j \neq i,k) \tag{4}$$

3. Пусть L_k^i-линейчатая поверхность с направляющей кривой ω^i и прямолинейными образующими $[x, \bar{e}_k]$. Поверхность L_k^i развертывающаяся тогда и только тогда, когда $a_{ki}^j = 0$ $(j \neq i,k)$. Если же

$$a_{ki}^j = 0 \quad (j \neq i,k), \quad a_{ki}^i = 0, \tag{5}$$

то L_k^i-цилиндр.

О п р е д е л е н и е. Линейную оболочку системы векторов $\bar{e}_i, \bar{e}_k, d_i\bar{e}_i, d_i\bar{e}_k$ назовем касательным пространством к L_k^i вдоль направляющей и обозначим через $V_{d_i}(L_k^i)$.

Заметим, что в общем случае справедливы соотношения: $2 \leq \dim V_{d_i}(L_k^i) \leq 4$, а в случае развертывающейся поверхности $\dim V_{d_i}(L_k^i) \leq 3$.

4. Рассмотрим такую R-сеть $\Sigma_n \subset E_n$, что на касательных к ее линиям имеется $\left[\frac{n}{2}\right]$ пар псевдофокусов F_{2t}^{2t-1}, F_{2t-1}^{2t} $(t = 1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right])$ и только они, т.е. удовлетворяются условия

$$a_{2t,2t-1}^{2t-1} \neq 0, \quad a_{2t-1,2t}^{2t} \neq 0, \tag{6}$$

$$a_{ki}^i = 0 \quad (i \neq k;\ k \neq 2t \text{ при } i = 2t-1,\ k \neq 2t-1 \text{ при } i = 2t). \tag{7}$$

При этом множество семейств линий R-сети Σ_n разбивается на $\left[\frac{n}{2}\right]$ пар и при n нечетном, кроме того, выделяется одно семейство $\omega^{t'}$. В соответствии с этим имеем распределения $\Delta_2 = \Delta(\bar{e}_{2t-1}, \bar{e}_{2t})$ 2-плоскостей $\pi_2(x) = [x, \bar{e}_{2t-1}, \bar{e}_{2t}]$ и распределение $\Delta_1 = \Delta(\bar{e}_{t'})$ прямых $[x, \bar{e}_{t'}]$. Можно сказать, что рассматриваемая R-сеть $\Sigma_n \subset E_n$ порождает $\tau\pi$-структуру [3] (где $\tau = \left[\frac{n+1}{2}\right]$), скомпонованную из $\left[\frac{n}{2}\right]$ 2-распределений и при n нечетном, кроме того, одного 1-распределения.

Систему уравнений (3) при выполнении соотношений (6), (7) с учетом ортогональности рассматриваемой сети Σ_n (см.(1)) можно записать так:

$$\omega_{2t-1}^{2t} = a_{2t-1,2t-1}^{2t} \omega^{2t-1} + a_{2t-1,2t}^{2t} \omega^{2t} + a_{2t-1,j}^{2t} \omega^j \quad (j \neq 2t-1, 2t),$$

$$\omega_{2t-1}^i = a_{2t-1,\ell}^i \omega^\ell \quad (i > 2t;\ \ell \neq 2t-1, i),$$

$$\omega_{2t}^k = a_{2t,m}^k \omega^m \quad (k > 2t;\ m \neq 2t, k).$$

В силу равенств (2) имеем $\omega_{2t-1}^{2t}\wedge\omega_{2t-1}^{i}=0$, $\omega_{2t-1}^{2t}\wedge\omega_{2t}^{k}=0$, отсюда вытекают, в частности, равенства $a_{2t-1,2t-1}^{2t}\,a_{2t-1,\ell}^{i}=0$, $a_{2t-1,2t}^{2t}\,a_{2t,m}^{k}=0$, из которых в силу (6) получаем

$$a^i_{2t-1,\ell}=0 \quad (i>2t;\ \ell\neq 2t-1,i), \tag{8}$$

$$a^k_{2t,m}=0 \quad (k>2t;\ m\neq 2t,k). \tag{9}$$

Заметим, что полученные равенства (8),(9) с учетом условий (1′) показывают, что $\dim V_{d_\ell}(L^\ell_{2t-1})\leq 3$, $\dim V_{d_m}(L^m_{2t})\leq 3$.

Равенства (8),(9) вместе с условиями (7) приводят к тому, что векторы $d\bar e_{2t-1}, d\bar e_{2t}$ параллельны плоскости $\pi_2(x)=[x,\bar e_{2t-1},\bar e_{2t}]$. Следовательно, каждое из распределений $\Delta(\bar e_{2t-1},\bar e_{2t})$ $(t=1,2,\dots,[\frac{n}{2}])$ является параллельным. Выделяющееся при n нечетном 1-распределение $\Delta(\bar e_{t'})$ также будет параллельным.

Таким образом имеем результат:

Т е о р е м а 1. Если на касательных к линиям R-сети Σ_n имеется ровно $[\frac{n}{2}]$ пар псевдофокусов $F^{2t-1}_{2t}, F^{2t}_{2t-1}$ $(t=1,2,\dots,[\frac{n}{2}])$, то эта сеть определяет декартову $[\frac{n+1}{2}]\pi$-структуру [3],[5], скомпонованную из $[\frac{n}{2}]$ 2-распределений и одного 1-распределения при n нечетном.

5. С учетом теоремы Дюпена о том, что n-ортогональная система является n-сопряженной системой, условия голономности ортогональной сети можно записать так:

$$a^k_{ij}=0\quad (i\neq j;\ k\neq i,j). \tag{10}$$

Л е м м а. Удовлетворяющая условиям теоремы 1 R-сеть Σ_n голономна тогда и только тогда, когда

$$a^{2t-1}_{2t,j}=a^{2t}_{2t-1,j}=0\quad (j=2t-1,2t) \tag{11}$$

Необходимость. Очевидна, ибо если имеют место равенства (10), то выполняются и равенства (11).

Достаточность. Для рассматриваемой R-сети Σ_n имеют место равенства (8),(9). Эти равенства с учетом условий (1′) и равенств (11) дают все равенства (10).

6. В силу соотношений (4) равенства (11) составляют необходимое и достаточное условие для того, чтобы псевдофокусы $F^{2t-1}_{2t}, F^{2t}_{2t-1}$ были соответственно Δ^{2t}_{n-1}-псевдофокусом и Δ^{2t-1}_{n-1}-псевдофокусом. Причем в силу соотношений (1′)

имеем, что если F^{2t-1}_{2t} является Δ^{2t}_{n-1}-псевдофокусом, то F^{2t}_{2t-1} является Δ^{2t-1}_{n-1}-псевдофокусом, и обратно.

Так как рассматриваемая R-сеть Σ_n удовлетворяет условиям теоремы 1, то легко видеть, что равенства (11) имеют место лишь тогда, когда

$$V_{d_\ell}(L^\ell_{2t-1})\cap V_{d_m}(L^m_{2t})\cap V(\bar e_{2t-1},\bar e_{2t})=\varnothing\quad (\ell,m\neq 2t-1,2t), \tag{12}$$

где $V(\bar e_{2t-1},\bar e_{2t})$ - линейная оболочка системы векторов $\bar e_{2t-1},\bar e_{2t}$. Таким образом, в силу леммы приходим к теореме:

Т е о р е м а 2. Для того чтобы R-сеть Σ_n, удовлетворяющая условиям теоремы 1, была голономной, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из каждой пары псевдофокусов F^{2t-1}_{2t}, F^{2t}_{2t-1} $(t=1,2,\dots,[\frac{n}{2}])$ был Δ^{2t}_{n-1}-псевдофокусом или соответственно Δ^{2t-1}_{n-1}-псевдофокусом, или же выполнялось условие (12).

З а м е ч а н и е. Для R-сети Σ_n, удовлетворяющей условиям теоремы 2, в силу равенств (10) имеем, что псевдофокусы $F^{2t-1}_{2t}, F^{2t}_{2t-1}$ являются обычными фокусами, а в силу равенств (7),(10) имеем, что каждая из поверхностей L^ℓ_{2t-1}, L^m_{2t} $(\ell,m\neq 2t-1,2t)$ является цилиндрической (см. соотношения (5)).

7. Докажем теорему существования R-сетей $\Sigma_n\subset E_n$, удовлетворяющих условиям теоремы 1. В силу равенств (1),(7)-(9) достаточно исследовать систему уравнений

$$\omega^{2t}_{2t-1}=a^{2t}_{2t-1,2t-1}\,\omega^{2t-1}+a^{2t}_{2t-1,2t}\,\omega^{2t}+a^{2t}_{2t-1,j}\,\omega^j$$

$$(t=1,2,\dots,[\tfrac{n}{2}];\ j=2t-1,2t).$$

Система ковариантов имеет вид

$$\Delta a^{2t}_{2t-1,2t-1}\wedge\omega^{2t-1}+\Delta a^{2t}_{2t-1,2t}\wedge\omega^{2t}+\Delta a^{2t}_{2t-1,j}\wedge\omega^j=0.$$

Отсюда имеем характеры $S_1=S_2=\dots=S_n=[\frac{n}{2}]$. Легко убедиться, что число Картана $Q=S_1+2S_2+\dots+nS_n$ равно числу произвольных параметров N [6].

Таким образом, R-сеть Σ_n, удовлетворяющая условиям теоремы [1], существует в евклидовом пространстве E_n с произволом $[\frac{n}{2}]$ функций n аргументов.

8. Для того чтобы найти произвол существования R-сетей $\Sigma_n\subset E_n$, удовлетворяющих условиям теоремы 2, следует учесть дополнительные условия (11) и при этом достаточно

исследовать систему уравнений

$$\omega^{2t}_{2t-1} = a^{2t}_{2t-1,2t-1}\,\omega^{2t-1} + a^{2t}_{2t-1,2t}\,\omega^{2t} \quad (t=1,2,\ldots,[\tfrac{n}{2}]).$$

Система ковариантов имеет вид

$$\Delta a^{2t}_{2t-1,2t-1} \wedge \omega^{2t-1} + \Delta a^{2t}_{2t-1,2t} \wedge \omega^{2t} = 0 .$$

Легко убедиться в том,что исследуемая нами система уравнений находится в инволюции [6] с характерами

$$S_1 = S_2 = [\tfrac{n}{2}],\ S_3 = \ldots = S_n = 0 .$$

Таким образом, R-сеть Σ_n,удовлетворяющая условиям теоремы 2 ,существует в евклидовом пространстве E_n с произволом $[\frac{n}{2}]$ функций двух аргументов.

Библиографический список

1.Б а з ы л е в В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей // Уч.зап./МГПИ им.В.И.Ленина.М.,1965.№ 243.С.29-37.

2.Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве// Лит.мат.сб./ АН Лит.ССР.Вильнюс,1966.Т.6.№4. С.475-491.

3.Е в т у ш и к Л.Е.,Л у м и с т е Ю.Г.,Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях// Проблемы геометрии/ ВИНИТИ. М.,1979.Т.9, С.5-246.

4.К у з ь м и н М.К. R-сети в евклидовом пространстве E_n.//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1982.Вып.13.С.50-53.

5.Н о р д е н А.П. Теория композиций // Проблемы геометрии/ ВИНИТИ. М.,1978.Т.10.С.117-145.

6.Ф и н и к о в С.П. Метод внешних форм Картана.М.-Л.: ГИТТЛ.1948.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 18 1987

УДК 514.75

КОНГРУЭНЦИИ ГИПЕРКВАДРИК С ФОКАЛЬНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

В.С. М а л а х о в с к и й

(Калининградский университет)

В n-мерном проективном пространстве P_n рассматривается ($n-1$)-мерное многообразие (конгруэнция) K_o невырожденных гиперквадрик,каждая гиперквадрика Q которого содержит фокальный квадратичный элемент C [1];причем гиперплоскости π квадратичных элементов образуют ($n-1$)-параметрическое семейство.Доказано,что конгруэнции K_o существуют и определяются с произволом двух функций $n-1$ аргументов. Построено безынтегральное представление конгруэнций K_o и конгруэнции C_o,описанной квадратичными элементами C . Для $n = 3$ конгруэнции K_o исследованы в [2].

§ 1. Теорема существования

Отнесем конгруэнцию K_o к реперу $\{A_\alpha\}$ $(\alpha,\beta,\gamma = \overline{0,n})$,где A_o-характеристическая точка гиперплоскости π , A_n - полюс гиперплоскости π относительно гиперквадрики $Q \in K_o$, а вершины A_i $(i,j,k,p,q = \overline{1,n-1})$ попарно полярно сопряжены и полярно сопряжены с A_o и A_n относительно Q .Репер $\{A_\alpha\}$ является автополярным репером первого рода гиперквадрики Q .При надлежащей нормировке его вершин уравнение гиперквадрики Q и уравнения квадратичного элемента C запишутся соответственно в виде

$$\mathcal{F} \equiv -(x^o)^2 + \delta_{pq}x^p x^q + (x^n)^2 = 0, \qquad (1.1)$$

$$f \equiv -(x^o)^2 + \delta_{pq}x^p x^q = 0,\quad x^n = 0, \qquad (1.2)$$

где δ_{pq} -символ Кронекера.

Используя условия стационарности точки пространства P_n