The giving for the regular H(П)-distribution of the projective space is produced in the 1-st order frame. Its dual image is constructed concerning some involutory transformation for structure forms of the projective space.

УДК 514.75.

О.М. Жовтенко

(*Калининградский государственный университет*)

ВЫРОЖДЕННЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ В СВЯЗНОСТЯХ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ОСНАЩЕНИЕМ БОРТОЛОТТИ КОНГРУЭНЦИИ ПЛОСКОСТЕЙ

Рассмотрено оснащение Бортолотти конгруэнции плоскостей в проективном пространстве. Приведены условия совпадения индуцированных групповых связностей двух типов. Дана геометрическая интерпретация совпадения групповых связностей. Описаны параллельные перенесения в связностях обоих типов, которые оказались свободно и связанно вырожденными.

Проективное пространство P_n отнесено к подвижному реперу $\{A, A_J\}$, деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA=\theta A+\omega^I A_I,\ dA_I=\theta A_I+\omega_I^J A_J+\omega_I A,$$

причем формы ω^I, ω_J^I, ω_I удовлетворяют структурным уравнениям проективной группы GP(n):

$$D\omega^I=\omega^J\wedge\omega_J^I,\ D\omega_I=\omega_I^J\wedge\omega_J,\ D\omega_I^J=\omega_I^K\wedge\omega_K^J+\delta_I^J\omega_K\wedge\omega^K+\omega_I\wedge\omega^J\ (I, J, K=\overline{1,n}).$$

В проективном пространстве P_n рассмотрено (n-m)-мерное семейство m-мерных плоскостей L_m – конгруэнция плоскостей B_{n-m} [1]. Произведена специализация подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$: вершины A, A_a помещены на плоскость L_m. Над семейством B_{n-m} построено главное расслоение $G(B_{n-m})$, типовым слоем которого является подгруппа стационарности G плоскости L_m. Расслоение $G(B_{n-m})$ содержит подрасслоение проективных реперов $P(B_{n-m})$ с типовым слоем – проективной группой $GP(m)\subset G\subset GP(n)$, действующей на плоскости L_m. Групповая связность в главном расслоении $G(B_{n-m})$ задана объектом связности $\Gamma=\{\Gamma_\alpha^a, \Gamma_{b\alpha}^a, \Gamma_{a\alpha}, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, \Gamma_{\alpha\beta}^a, \Gamma_{\alpha\beta}\}$.

Произведено оснащение Бортолотти конгруэнции плоскостей, состоящее в присоединении к каждой m-мерной плоскости L_m (n-m-1)-мерной плоскости P_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L_m. Плоскость P_{n-m-1} определена совокупностью точек $B_\alpha=A_\alpha+\lambda_\alpha^a A_a+\lambda_\alpha A$. В работе [1] доказано, что оснащение

Бортолотти конгруэнции плоскостей индуцирует два типа групповой связности с объектами $\overset{1}{\Gamma}$ и $\overset{2}{\Gamma}$ в ассоциированном расслоении $G(B_{n-m})$. В первом случае компоненты объекта связности $\overset{1}{\Gamma}=\{\overset{0}{\Gamma}{}^a_\alpha, \overset{0}{\Gamma}_{a\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{b\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}, \overset{1}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta}, \overset{1}{\Gamma}_{\alpha\beta}\}$ охватываются посредством оснащающего квазитензора $\lambda=\{\lambda^a_\alpha, \lambda_\alpha\}$ и фундаментального объекта первого порядка $\Lambda^\alpha_{a\beta}$ семейства плоскостей B_{n-m} по формулам [2]:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^a_\alpha = \lambda^a_\alpha, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{b\alpha} = \Lambda^\beta_{b\alpha}\lambda^a_\beta - \delta^a_b\lambda_\alpha, \overset{0}{\Gamma}_{a\alpha} = \Lambda^\beta_{a\alpha}\lambda_\beta, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} = -\Lambda^\alpha_{a\gamma}\lambda^a_\beta - \delta^\alpha_\beta\lambda_\gamma - \delta^\alpha_\gamma\lambda_\beta, \quad (1)$$

$$\overset{1}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta} = -\lambda^a_\gamma M^\gamma_{\alpha\beta}, \overset{1}{\Gamma}_{\alpha\beta} = -\lambda_\gamma M^\gamma_{\alpha\beta} \quad (M^\gamma_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma_{b\beta}\lambda^b_\alpha + \delta^\gamma_\beta\lambda_\alpha) \quad (2)$$

Во втором случае компоненты объекта связности $\overset{2}{\Gamma}=\{\overset{0}{\Gamma}{}^a_\alpha, \overset{0}{\Gamma}_{a\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{b\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}, \overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta}, \overset{2}{\Gamma}_{\alpha\beta}\}$ охватываются с помощью компонент оснащающего квазитензора λ и их пфаффовых производных по формулам (1) и следующим:

$$\overset{2}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta} = \lambda^a_{\alpha\beta} + \lambda^a_\gamma \overset{0}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta} - \lambda^b_\alpha \overset{0}{\Gamma}{}^a_{b\beta} - \lambda_\alpha \overset{0}{\Gamma}{}^a_\beta, \overset{2}{\Gamma}_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta} + \lambda_\gamma \overset{0}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta} - \lambda^a_\alpha \overset{0}{\Gamma}_{a\beta}. \quad (3)$$

Определение. Оснащение Бортолотти называется специальным, если пфаффовы производные компонент оснащающего квазитензора λ имеют вид:

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha\lambda_\beta + \lambda^a_\alpha\lambda_\gamma\Lambda^\gamma_{a\beta}, \ \lambda^a_{\alpha\beta} = \lambda^a_\beta\lambda_\alpha + \lambda^b_\alpha\lambda^a_\gamma\Lambda^\gamma_{b\beta}. \quad (4)$$

Теорема 1. *Если оснащение Бортолотти специальное, то оснащающая плоскость* P_{n-m-1} *неподвижна, и наоборот.*

Для доказательства достаточно рассмотреть дифференциалы точек B_α и равенства (4).

Теорема 2. *Связности двух типов совпадают тогда и только тогда, когда плоскость Бортолотти неподвижна.*

Действительно, равенства (4) являются необходимыми и достаточными условиями совпадения двух типов охватов и в то же время обеспечивают неподвижность плоскости Бортолотти.

Рассмотрим дифференциалы точек B_α, задающих плоскость P_{n-m-1}:

$$dB_\alpha = (...)^\beta_\alpha B_\beta + (d\lambda^a_\alpha + \lambda^b_\alpha\omega^a_b - \lambda^a_\beta\omega^\beta_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a + \omega^a_\alpha - \lambda^b_\alpha\lambda^a_\beta\omega^\beta_b - \lambda_\alpha\lambda^a_\beta\omega^\beta)A_a +$$
$$+(d\lambda_\alpha - \lambda_\beta\omega^\beta_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha - \lambda_\alpha\lambda_\beta\omega^\beta - \lambda^a_\alpha\lambda_\beta\omega^\beta_a)A.$$

Выразим $d\lambda^a_\alpha$ и $d\lambda_\alpha$ через ковариантные дифференциалы $\nabla\lambda^a_\alpha$ и $\nabla\lambda_\alpha$ (формулы (9), (10) работы [1]) и подставим в предыдущее выражение:

$$dB_\alpha = (...)^\beta_\alpha B_\beta + (\nabla\lambda^a_\alpha + (\lambda^b_\alpha\Gamma^a_{b\gamma} + \lambda_\alpha\Gamma^a_\gamma - \lambda^a_\beta\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} + \Gamma^a_{\alpha\gamma} - \lambda_\alpha\lambda^a_\gamma - \lambda^b_\alpha\lambda^a_\beta\Lambda^\beta_{b\gamma})\omega^\gamma)A_a +$$
$$+(\nabla\lambda_\alpha + (\lambda^a_\alpha\Gamma_{a\gamma} - \lambda_\beta\Gamma^\beta_{\alpha\gamma} + \Gamma_{\alpha\gamma} - \lambda_\alpha\lambda_\gamma - \lambda^a_\alpha\lambda_\beta\Lambda^\beta_{a\gamma})\omega^\gamma)A.$$

Из этих формул видно, что при $\nabla\lambda^a_\alpha=0$ и $\nabla\lambda_\alpha=0$ специальных смещений плоскости P_{n-m-1} не выделяется, т.е. параллельное перенесение является свободно вырожденным [3]. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *В групповой связности, не являющейся связностью 1-го типа, параллельное перенесение оснащающей плоскости P_{n-m-1} будет свободно вырожденным.*

Найдем дифференциалы точек B_α с помощью объекта связности $\overset{1}{\Gamma}$, компоненты которого удовлетворяют формулам (1, 2). Имеем

$$dB_\alpha=(...)^\beta_\alpha B_\beta+\overset{1}{\nabla}\lambda^a_\alpha A_a+\overset{1}{\nabla}\lambda_\alpha A.$$

Отсюда следует

Теорема 4. *В групповой связности 1-го типа параллельное перенесение оснащающей плоскости P_{n-m-1} будет связанно вырожденным, т.е. плоскость P_{n-m-1} неподвижна в этой связности.*

Аналогично находим дифференциалы точек B_α с помощью объекта связности $\overset{2}{\Gamma}$, компоненты которого удовлетворяют формулам (1, 3):

$$dB_\alpha=(...)^\beta_\alpha B_\beta+(\overset{2}{\nabla}\lambda^a_\alpha+(\lambda^a_{\alpha\beta}-\lambda_\alpha\lambda^a_\beta-\lambda^b_\alpha\lambda^a_\gamma\Lambda^\gamma_{b\beta})\omega^\beta)A_a+$$

$$+(\overset{2}{\nabla}\lambda_\alpha+(\lambda_{\alpha\beta}-\lambda_\alpha\lambda_\beta-\lambda^a_\alpha\lambda_\gamma\Lambda^\gamma_{a\beta})\omega^\beta)A.$$

Из этого выражения с учетом формул (3) вытекает

Теорема 5. *При специальном оснащении параллельное перенесение в связности 2-го типа будет таким же, как в связности 1-го типа, т.е. связанно вырожденным.*

Теорема 6. *При неспециальном оснащении параллельное перенесение в связности 2-го типа будет свободно вырожденным.*

Список литературы

1. *Жовтенко О.М.* Роль оснащения Бортолотти конгруэнции плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2000. №31. С. 28 – 33.

2. *Шевченко Ю.И.* Об оснащениях многообразий плоскостей в проективном пространстве // Там же, 1978. № 9. С. 124 – 133.

3. *Шевченко Ю.И.* Оснащения голономного и неголономного гладких многообразий. Калининград, 1998.

O. Zhovtenko

DEGENERATE PARALLEL DISPLACEMENTS IN THE CONNECTIONS, INDUCED BOTOLOTTI′S EQUIPMENT OF THE FAMILY OF PLANES

Botolotti′s equipment of the family of planes in the projective space is considered. The coinsidence conditions induced group connection of two types are found. Their geometrical interpretation is given. Parallel displacements in the connections of both types are described. They are freely and connectly degenerate.