В точке типа $Z^{1,2,3}_{1,2,3}$ любое направление является слабо характеристическим направлением. Характеристические направления в такой точке лежат в гиперплоскости

$$\left(\frac{1}{n+1}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}-\frac{1}{n}\Gamma^{\hat\beta}_{\alpha\hat\beta}\right)X^{\alpha}-\left(\frac{1}{n}\Gamma^{\beta}_{\hat\alpha\beta}-\frac{1}{n+1}\Gamma^{\hat\beta}_{\hat\alpha\hat\beta}\right)X^{\hat\alpha}=0, \quad (4.2)$$

а также в F_1 и F_2-подпространствах.

И, наконец, в точке типа $Z^{1,2,3,4}_{1,2,3,4}$ любое направление является характеристическим.

Литература

I. Малаховский В.С., Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. (Труды геом. семинара, т.2, I969, ВИНИТИ АН СССР, стр. I79-206).

2. Рыжков В.В., Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n. (Труды геом. семинара, т.3, I97I, ВИНИТИ АН СССР, с.235-242).

3. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М., Распределения m-мерных линейчатых элементов в пространстве проективной связности I. (Труды геом. семинара, т.3, I97I, ВИНИТИ АН СССР, с.49-94)

4. Андреев Б.А., О дифференциальной геометрии соответствий между точечными пространствами и некоторыми пространствами пар фигур. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.3, Калининград, I973, с.6-I9.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.5 1974

Ивлев Е.Т.

ОБ ОСНАЩЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ ПРОСТРАНСТВА ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ.

В статье [I] в пространстве проективной связности геометрически построены поля нормалей первого и второго рода в смысле Нордена А.П. m-поверхности S_m с заданным полем гиперплоскостей, проходящих через соответствующие m-плоскости L_m, касательные к S_m, т.е. m-мерной гиперполосы в смысле Вагнера В.В. [2]. Настоящая статья посвящена другому построению поля нормалей первого рода m-мерной гиперполосы в $P_{n,n}$, отличному от того, которое дается в статье [I]. В заключительном параграфе данной статьи решается одна задача, связанная с оснащением m-мерной гиперполосы в пространстве проективной связности.

Обозначения и терминология соответствуют принятым в [3]-[5] и [I].

§I. Аналитический аппарат.

Как известно [4], пространство проективной связности $P_{n,n}$ есть расслоенное пространство, базой которого служит

n-мерное дифференцируемое многообразие, а слоем (u), соответствующим точке $A(u)$ базы, является n-мерное проективное пространство P_n. Здесь u означает локальные координаты $u^1, \ldots, u^n$ точки A базы, которые являются первыми интегралами некоторой вполне интегрируемой системы форм ω^i ($i, j, k = 1, 2, \ldots, n$). Пусть слой (u) отнесен к подвижному проективному реперу $T = \{A_0(u), \ldots, A_n(u)\}$, где $A \equiv A_0$. Линейные дифференциальные формы $\omega^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}}$ являются формами связности, т.е. определяют главную линейную часть отображения локального проективного пространства $P_n(u+du)$ точки $A(u+du)$ базы пространства $P_{n,n}$ на исходное пространство $P_n(u)$:

$$A_{\mathcal{J}}(u+du) \to A_{\mathcal{J}}(u, du) \cong A_{\mathcal{J}}(u) + \omega^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}} A_{\mathcal{K}}(u),$$

тогда и только тогда, когда они подчинены следующим структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}} = \omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{K}} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{L}} + R^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}ij}\, \omega^i \wedge \omega^j, \tag{1.1}$$

$$\omega^{\mathcal{L}}_{\mathcal{L}} = 0,$$

$$(\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L} = 0, 1, \ldots, n; \quad i, j, k, \ell = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь тензор кручения-кривизны $R^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}ij}$ кососимметричен по индексам i и j.

Рассмотрим в $P_{n,n}$ некоторую m-мерную поверхность (m-поверхность) S_m, текущей точкой которой является точка A_0. Проективный репер T локального проективного пространства P_n (слоя) точки A_0 m-поверхности S_m выбираем так, чтобы m-плоскость $L_m = (A_0 A_1 \ldots A_m)$ являлась касательной m-плоскостью к S_m в точке A_0. Тогда

$$\omega^{\hat\alpha} = 0, \quad (\hat\alpha, \hat\beta, \hat\gamma = m+1, \ldots, n), \tag{1.2}$$

(см., например, формулы (7) в [I]. Продолжение этой системы с использованием структурных уравнений (I.I) приводит к системе

$$\omega^{\hat\alpha}_{\beta} = A^{\hat\alpha}_{\beta\gamma}\, \omega^{\gamma}, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \mu, \sigma = 1, 2, \ldots, m), \tag{1.3}$$

где

$$A^{\hat\alpha}_{\beta\gamma} = \Lambda^{\hat\alpha}_{\beta\gamma} + R^{\hat\alpha}_{0\gamma\beta}. \tag{1.4}$$

Здесь величины $\Lambda^{\hat\alpha}_{\beta\gamma}$ симметричны, а величины $R^{\hat\alpha}_{0\gamma\beta}$ кососимметричны по индексам β и γ.

Продолжение системы (I.3) приводит к системе дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют компоненты геометрического объекта $\{A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\}$ [3]:

$$d A^{\hat\alpha}_{\beta\gamma} + A^{\hat\alpha}_{\beta\gamma}\, \omega^0_0 - A^{\hat\alpha}_{\beta\sigma}\, \omega^{\sigma}_{\gamma} - A^{\hat\alpha}_{\sigma\gamma}\, \omega^{\sigma}_{\beta} + A^{\hat\gamma}_{\beta\gamma}\, \omega^{\hat\alpha}_{\hat\gamma} +$$

$$+ (R^{\sigma}_{0\alpha\gamma} A^{\hat\alpha}_{\beta\sigma} + R^{\hat\alpha}_{\beta\gamma\alpha})\, \omega^{\alpha} = \bar A^{\hat\alpha}_{\beta\gamma\sigma}\, \omega^{\sigma}, \tag{1.5}$$

(см., например, формулы (II) в [I]). Здесь величины $\bar A^{\hat\alpha}_{\beta\gamma\sigma}$ симметричны по индексам γ и σ.

§2. Гиперконусы $T^m_{(k)}$ ($k = 1, 2, 3$).

I. Рассмотрим в каждом локальном пространстве P_n (слое) точки A_0 гиперплоскость, проходящую через L_m и определяемую уравнением

$$x_{\hat\alpha}\, x^{\hat\alpha} = 0 . \qquad (2.1)$$

В статье [I] (см. §3) показано, что каждой гиперплоскости (2.I) в m-плоскости L_m отвечают конус второго порядка с вершиной в точке A_0, определяемый системой

$$x_{\hat\alpha} \Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} = 0 ,\ x^{\hat\beta} = 0 , \qquad (2.2)$$

и $(m-1)$-мерный линейный комплекс, определяемый уравнениями

$$x_{\hat\alpha} R^{\hat\alpha}_{0\alpha\beta}\, x^{\alpha} t^{\beta} = 0 ,\ \ x^{\hat\alpha} = 0 ,\ t^{\hat\beta} = 0 . \qquad (2.3)$$

Геометрическая интерпретация этих образов дана в статье [I] (см. (32) и (33)).

В статье [I] также показано, что с гиперплоскостью (2.I) ассоциируется $(m-1)$-плоскость в L_m, проходящая через A_0 и определяемая системой (см. (29) в [I]):

$$x^{\alpha} x_{\hat\alpha} A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} t^{\beta} = 0 ,\ \ t^{\hat\beta} = 0 , \qquad (2.4)$$

которая отвечает каждой прямой (28) в [I]. Геометрически эта $(m-1)$-плоскость, как известно [I], содержит все прямые (30) в [I], в направлении которых $Tx\{t^{\alpha}\}$ принадлежит гиперплоскости (2.I). Здесь $Tx\{t^{\alpha}\}$ касательное линейное подпространство к I-семейству прямых

$$x = x^{\alpha} (A_0 A_{\alpha}) \qquad (2.5)$$

в направлении

$$t = t^{\alpha} (A_0 A_{\alpha}) .$$

2. Геометрические образы (2.4), (2.2) и (2.3) дают возможность определить и геометрически охарактеризовать гиперконусы $\underset{(k)}{T}{}^{m}$ класса m с вершиной L_m, каждый из которых определяется соответствующим уравнением:

$$\underset{(k)}{G}{}^{\hat\alpha_1 \hat\alpha_2 \dots \hat\alpha_m}\, x_{\hat\alpha_1} x_{\hat\alpha_2} \dots x_{\hat\alpha_m} = 0 , \qquad (2.6)$$

$$(k = 1,2,3 ;\ \ \hat\alpha_1 , \hat\alpha_2 , \dots , \hat\alpha_m = m+1, \dots , n) ,$$

где симметрические по верхним индексам величины $\underset{(k)}{G}{}^{\hat\alpha_1 \dots \hat\alpha_m}$ определяются по формулам:

$$\underset{(1)}{G}{}^{\hat\alpha_1 \hat\alpha_2 \dots \hat\alpha_m} = \frac{1}{m!} \det \left\| A^{(\hat\alpha_1}_{1\alpha}\ A^{\hat\alpha_2}_{2\alpha} \dots A^{\hat\alpha_m)}_{m\alpha} \right\|$$

$$\underset{(2)}{G}{}^{\hat\alpha_1 \hat\alpha_2 \dots \hat\alpha_m} = \frac{1}{m!} \det \left\| \Lambda^{(\hat\alpha_1}_{1\alpha}\ \Lambda^{\hat\alpha_2}_{2\alpha} \dots \Lambda^{\hat\alpha_m)}_{m\alpha} \right\| \qquad (2.7)$$

$$\underset{(3)}{G}{}^{\hat\alpha_1 \hat\alpha_2 \dots \hat\alpha_m} = \frac{1}{m!} \det \left\| R^{(\hat\alpha_1}_{01\alpha}\ R^{\hat\alpha_2}_{02\alpha} \dots R^{\hat\alpha_m)}_{0m\alpha} \right\|$$

(α -номер строк).

Каждый из гиперконусов $\underset{(k)}{T}{}^{m}$ является определенным при следующих соотношениях между m и n :

$$T^m_{(1)}: \qquad n \le m^2+m\,,$$

$$T^m_{(2)}: \qquad n \le \frac{m(m+3)}{2}\,, \qquad (2.7')$$

$$T^m_{(3)}: \qquad n \le \frac{m(m+1)}{2}\,,$$

m - четное

Геометрически гиперконус $T^m_{(2)}$ представляет собой совокупность всех гиперплоскостей (2.I) в слое, которым в отвечают вырожденные конусы (2.2) (т.е. конусы (2.2) с прямолинейными вершинами, проходящими через A_0), так как уравнения $\det\| x_{\hat\alpha} \Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\| = 0$ и (2.6) при $k=2$ эквивалентны. Гиперконус же $T^m_{(3)}$ представляет собой совокупность всех гиперплоскостей (2.I) в слое точки A_0, которым в L_m отвечают особые линейные комплексы (2.3). При этом линейный комплекс (2.3), отвечающий гиперплоскости (2.I), называется особым [6], если $\det\| x_{\hat\alpha} R^{\hat\alpha}_{0\alpha\beta}\| = 0$, что равносильно уравнению (2.6) при $k=3$. Особый линейный комплекс в общем случае каждой прямой $x = x^\alpha(A_0A_\alpha)$, проходящей через A_0, ставит в соответствие (в нуль-системе) ($m-1$)-плоскость (2.3), проходящую через прямую x и содержащую независимо от выбора прямой x одну и ту же (особую) прямую, на которой лежит точка A_0.

Остановимся на геометрической интерпретации гиперконуса $T^m_{(1)}$. Будем искать такие прямые x, которым отвечают неопределенные ($m-1$)-плоскости (2.4). Это возможно тогда и только тогда, когда

$$x^\alpha x_{\hat\alpha} A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} = 0. \qquad (2.8)$$

Геометрически это означает, что касательное линейное подпространство к m-семейству прямых $x = x^\alpha(A_0A_\alpha)$ принадлежит гиперплоскости (2.I). При этом касательное линейное подпространство к m-семейству прямых x определяют главные линейные части смещений образа прямой x в исходном слое $P_n(u)$ при смещении точки A_0 (а, следовательно, и прямой x) по поверхности S_m:

$$x(u+du) - x(u) = x^\alpha A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\,\omega^\beta (A_0A_{\hat\alpha}) + (\dots)^\alpha (A_0A_\alpha) + [2].$$

Система (2.8) будет иметь нетривиальные решения относительно x^α тогда и только тогда, когда

$$\det\| x_{\hat\alpha} A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\| = 0,$$

что равносильно уравнению (2.6) при $k=1$. Таким образом, гиперконус $T^m_{(1)}$ представляет собой совокупность всех гиперплоскостей (2.I), каждой из которых отвечает прямая $x = x^\alpha(A_0A_\alpha)$ в m-плоскости L_m (ассоциированная прямая), такая, что касательное линейное подпространство к m-семейству таких прямых принадлежит этой гиперплоскости.

Замечание I. Из геометрических соображений, а так же из (2.6) и (2.7) следует, что каждый из гиперконусов $T^m_{(k)}$ определен при соответствующих ограничениях (2.7'), так как величины $A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}$ в общем случае не симметричны по α и β, величины $\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}$ симметричны, а $R^{\hat\alpha}_{0\alpha\beta}$ кососимметричны,а по α и β .

З а м е ч а н и е 2. В случае,если пространство $P_{n,n}$ является пространством без кручения ($R^{x}_{oij}\equiv 0$) или однородным ($R^{x}_{\gamma ij}\equiv 0$),то гиперконусы $T^m_{(1)}$ и $T^m_{(2)}$ в силу (I.4),(2.6) и (2.7) совпадают друг с другом,а гиперконус $T^m_{(3)}$ становится неопределенным.В случае однородного пространства $P_{n,n}$ гиперконус $T^m_{(1)}$ совпадает с касательным в смысле [7] или фокальным в смысле [8] гиперконусом к m-поверхности S_m.

З а м е ч а н и е 3. Из (I.3),(I.4) и (I.5) следует, что величины (2.7) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$dG^{\hat\alpha_1\hat\alpha_2\dots\hat\alpha_m} + \underset{(k)}{\Omega}\, \underset{(k)}{G}^{\hat\alpha_1\hat\alpha_2\dots\hat\alpha_m} + \underset{(k)}{G}^{\hat\beta\hat\alpha_2\dots\hat\alpha_m}\omega^{\hat\alpha_1}_{\hat\beta} + \dots +$$

$$+ \underset{(k)}{G}^{\hat\alpha_1\hat\alpha_2\dots\hat\alpha_{m-1}\hat\beta}\omega^{\hat\alpha_m}_{\hat\beta} = \underset{(k)}{G}^{\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_m}_{\gamma}\,\omega^{\gamma}, \qquad (2.9)$$

где

$$\underset{(1)}{\Omega} = \underset{(2)}{\Omega} = m\,\omega^0_0 - 2\,\omega^\gamma_\gamma\,, \quad \underset{(3)}{\Omega} = 2\,(m\,\omega^0_0 - \omega^\gamma_\gamma),$$

причем явный вид величин $\underset{(k)}{G}^{\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_m}_{\gamma}$ нас не интересует. Из (2.9) следует,что каждая из систем величин (2.7) является тензором в смысле Г.Ф.Лаптева[3],симметрическим по всем верхним индексам.

§3.Поле нормалей первого рода m-поверхности S_m,оснащенной полем касательных гиперплоскостей.

I.Рассмотрим гиперплоскость ℓ_{n-1},проходящую через m-плоскость L_m,которая в локальных координатах репера T слоя $P_n(u)$ точки A_0 определяется уравнением

$$x^n - b_p x^p = 0, \quad (p,q,r = m+1,\dots,n-1). \quad (3.1)$$

Здесь величины b_p удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$d b_p + b_p\,\omega^n_n - b_p b_q\,\omega^q_n - b_q\,\omega^q_p + \omega^n_p = b_{p\beta}\,\omega^\beta \qquad (3.2)$$

(см.уравнения (13) в [I]).Продолжение этой системы дифференциальных уравнений приводит к дифференциальным уравнениям

$$d b_{p\beta} + b_{p\beta}(\omega^0_0 + \omega^n_n) - b_{p\gamma}\omega^\gamma_\beta - b_{q\beta}\omega^q_p + A_{\gamma\beta}(\omega^\gamma_p + b_p\omega^\gamma_n) -$$

$$-(b_{r\beta} + b_r b_{p\beta})\,\omega^r_n = (b_{p\alpha}R^\alpha_{o\beta\gamma} + b_p R^n_{n\gamma\beta} - b_p b_q R^q_{n\gamma\beta} -$$

$$- b_q R^q_{p\gamma\beta} + R^n_{p\gamma\beta} + b_{p\gamma\beta})\,\omega^\gamma, \qquad (3.3)$$

где

$$A_{\gamma\beta} = A^q_{\gamma\beta} b_q - A^n_{\gamma\beta}\,, \qquad (3.4)$$

причем величины $b_{p\beta\gamma}$ симметричны по индексам β и γ .

Заметим,что система дифференциальных уравнений,состоящая из (I.2),(I.3) и (3.2) при условии (I.5) и (3.3) определяет в пространстве $P_{n,n}$ m-мерную гиперполосу в смысле [2]. Так же ,как и в [I],находим,что $(n-m-1)$-плоскость

$$L^*_{n-m-1} = (E_0 E_{m+1}\dots E_{n-1}), \qquad (3.5)$$

где

$$E_0 = A_0, \quad E_p = a_p^\alpha A_\alpha + A_p + b_p A_n \qquad (3.6)$$

является характеристическим элементом гиперплоскости (3.I). Здесь величины a_p^α определяются по формулам

$$a_q^\alpha = \frac{1}{A}\, b_{q\beta} A^{\beta\alpha}, \qquad (3.7)$$

причем

$$A = \det\|A_{\gamma\beta}\|, \qquad A_{\alpha\gamma}A^{\gamma\beta} = A\,\delta_\alpha^\beta. \qquad (3.8)$$

При этом из рассмотрения исключается случай $A=\det\|A_{\alpha\beta}\|=0$, когда гиперплоскость (3.I) принадлежит гиперконусу $T^m_{(1)}$.

С помощью дифференциальных уравнений (3.3),(3.2) и (I.5) найдем, что величины $A_{\gamma\beta}$, определенные по формулам (3.4), и величины (3.7) и (3.8) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$dA_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}(\omega_0^0+\omega_n^n) - A_{\alpha\beta} b_q \omega_n^q - A_{\sigma\beta}\omega_\alpha^\sigma - A_{\alpha\sigma}\omega_\beta^\sigma = A_{\alpha\beta\sigma}\omega^\sigma,$$

$$dA = \Omega A + \tilde{A}_\sigma \omega^\sigma,$$

$$dA^{\sigma\beta} - \Omega^* A^{\sigma\beta} + A^{\mu\beta}\omega_\mu^\sigma + A^{\sigma\mu}\omega_\mu^\beta = A_\gamma^{\sigma\beta}\omega^\gamma, \qquad (3.9)$$

$$da_p^\alpha + a_p^\beta\omega_\beta^\alpha + \omega_p^\alpha + b_p\omega_n^\alpha - a_q^\alpha(\omega_p^q + \omega_n^q b_p) = a_{p\sigma}^\alpha\omega^\sigma,$$

где

$$\Omega = 2\omega_\alpha^\alpha - m(\omega_0^0+\omega_n^n) + m\,\omega_n^q b_q, \quad \Omega^* = \Omega + (\omega_0^0+\omega_n^n) - b_q\omega_n^q,$$

$$A_{\alpha\beta\sigma} = A_{\alpha\beta}^p b_{p\sigma} + b_p A^p_{\alpha\beta\sigma} - A^n_{\alpha\beta\sigma},$$

$$\tilde{A}_\sigma = \det\|A_{1\beta\sigma} A_{2\beta}\dots A_{m\beta}\| + \dots + \det\|A_{1\beta}\dots A_{m-1,\beta}A_{m\beta\sigma}\|,$$

$$A_\gamma^{\sigma\beta} = \frac{1}{A}\tilde{A}_\gamma A^{\sigma\beta} - \frac{1}{A}A^{\alpha\beta}A^{\sigma\tau}A_{\alpha\tau\gamma}, \qquad (3.10)$$

$$a^\alpha_{p\sigma} = \frac{1}{A}A^{\beta\alpha}\bar{b}_{p\beta\sigma} - \frac{\tilde{A}_\sigma}{A}a_p^\alpha + \frac{b_{p\beta}}{A}A^{\beta\alpha}_\sigma,$$

$$\bar{b}_{p\beta\sigma} = b_{p\beta\sigma} + b_{p\alpha}R^\alpha_{0\sigma\beta} - b_p R^n_{n\sigma\beta} + b_p b_q R^q_{n\sigma\beta} + b_q R^q_{p\sigma\beta} - R^n_{n\sigma\beta}.$$

Из (3.9) замечаем, что величины $A_{\alpha\beta}$ и $A^{\sigma\beta}$ являются относительно инвариантными величинами.

2. Так же, как и в [I](см. (25) и (26)), найдем, что $(n-m-2)$-плоскость

$$L^*_{n-m-2} = (H_{m+1}\dots H_{n-1}), \qquad (3.11)$$

где

$$H_p = E_p + a_p A_0 = a_p^\alpha A_\alpha + A_p + b_p A_n + a_p A_0, \qquad (3.12)$$

$$a_p = -\frac{1}{m}a^\alpha_{p\alpha}, \qquad (3.13)$$

является линейной полярой точки A_0 относительно фокусной алгебраической поверхности линейного подпространства (3.5).

Продолжая систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют величины a^α_p (см.(3.9), найдем, что величины a_p, определенные по формулам (3.I3), удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$da_p - a_q\omega^q_p - a_p b_q\omega^q_n + b_p\omega^0_n + \omega^0_p + a^\alpha_p\omega^0_\alpha + a_p\omega^0_0 = a_{p\sigma}\omega^\sigma \qquad (3.13')$$

Здесь явный вид величин $a_{p\sigma}$ нас не интересует.

3. Рассмотрим $(m+1)$-плоскость

$$L_{m+1} = (L_m, A_{\hat\alpha})\Lambda^{\hat\alpha}, \qquad (3.14)$$

где

$$\Lambda^{\hat\alpha} = \Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha\beta},$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta\gamma} = \Lambda\delta^\gamma_\alpha, \quad \Lambda = \det\|\Lambda_{\alpha\beta}\|, \qquad (3.15)$$

$$\Lambda_{\alpha\beta} = A_{(\alpha\beta)} = \Lambda^p_{\alpha\beta}b_p - \Lambda^n_{\alpha\beta}.$$

Геометрическая характеристика этой $(m+1)$-плоскости дана в [I] (см. пункт 3§3). При этом из рассмотрения исключается случай $\Lambda = \det\|\Lambda_{\alpha\beta}\| = 0$, когда гиперплоскость (3.I) принадлежит гиперконусу $T^m_{(2)}$.

Пользуясь формулами (I.4), (I.5), (3.I) и (3.I5), получаем, что система величин $\Lambda^{\hat\alpha}$ удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений:

$$d\Lambda^{\hat\alpha} = -\Lambda^{\hat\gamma}\omega^{\hat\alpha}_{\hat\gamma} + \Lambda^{\hat\alpha}\Omega^{**} + \tilde\Lambda^{\hat\alpha}_\sigma\omega^\sigma, \qquad (3.16)$$

где

$$\tilde\Lambda^{\hat\alpha}_\sigma = \Lambda^{\beta\gamma}\Lambda_{\beta\gamma\sigma} + \Lambda^{\hat\alpha}_{\beta\gamma}\Lambda^{\beta\gamma}_\sigma, \qquad (3.17)$$

$$\Omega^{**}_{\beta\gamma} = 2\omega^\alpha_\alpha - (1+m)(\omega^0_0 + \omega^n_n - b_q\omega^q_n) - \omega^0_0.$$

Здесь величины $\Lambda^{\beta\gamma}_\sigma$ определяются по таким же формулам, что $A^{\sigma\beta}_\gamma$ в (3.I0), но только надо вместо A писать Λ с соответствующими индексами.

4. Зададим на m-поверхности S_m некоторую кривую

$$\omega^{\hat\alpha} = 0, \quad \omega^\alpha = t^\alpha\theta, \quad \mathcal{D}\theta = 0, \qquad (3.18)$$

где t^α удовлетворяют при фиксированных главных параметрах дифференциальным уравнениям

$$\delta t^\alpha - t^\alpha\pi^0_0 + t^\beta\pi^\alpha_\beta = 0.$$

Здесь δ -символ дифференцирования по вторичным параметрам, а $\pi^x_y = \omega^x_y(\delta)$.

Пусть точка $X = x^p H_p = x^p(a^\alpha_p A_\alpha + a_p A_0 + b_p A_n + A_p)$ принадлежит $(n-m-2)$-плоскости (3.II). Тогда вдоль развертки [I] кривой (3.I8) с учетом (I.3), (3.I), (3.9) и (3.I3) будем иметь

$$\frac{dX}{\theta} = (\ldots)^q H_q + \{(a^\alpha_{p\sigma}t^\sigma + b_p t^\alpha)A_\alpha +$$

$$+ a^\alpha_p A^q_{\alpha\sigma}t^\sigma(A_q + b_q A_n) + a_{p\sigma}t^\sigma A_0\}x^p. \qquad (3.19)$$

Отсюда следует, что точка

$$X^* = x^\rho \{ a_{\rho\sigma} t^\sigma A_0 + (a^\alpha_{\rho\sigma} t^\sigma + b_\rho t^\alpha) A_\alpha \}$$

есть точка пересечения m-плоскости L_m с линейным подпространством, проходящим через $\overset{*}{L}_{n-m-2}$ и касательную к линии, описываемой точкой X вдоль (3.18). Вдоль развертки кривой (3.18) с учетом (1.3) будем иметь:

$$\frac{dX^*}{\theta} = (\ldots)^0 A_0 + (\ldots)^\alpha A_\alpha + x^\rho (a^\alpha_{\rho\sigma} t^\sigma + b_\rho t^\alpha) A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} t^\beta A_{\hat\alpha}.$$

Поэтому $TX^*\{t^\alpha\}$ - касательная к линии $X^*\{t^\alpha\}$, описываемой точкой X^* вдоль (3.18) - будет принадлежать гиперплоскости (3.1) тогда и только тогда, когда в силу (3.4)

$$x^\rho W_{\rho\sigma\beta} t^\sigma t^\beta = 0, \qquad (3.20)$$

где

$$W_{\rho\sigma\beta} = a^\alpha_{\rho\sigma} A_{\alpha\beta} + b_\rho A_{\sigma\beta}. \qquad (3.21)$$

Итак, каждой точке $X = x^\rho H_\rho \in \overset{*}{L}_{n-m-2}$ в L_m отвечает конус (3.20) с вершиной в точке A_0, в направлении прямолинейных образующих $t = (A_0 A_\alpha) t^\alpha$ которого $TX^*\{t^\alpha\}$ принадлежит гиперплоскости (3.1). Поэтому $(n-m-3)$-плоскость

$$x^n = b_\rho x^\rho, \quad x^\alpha = a^\alpha_\rho x^\rho, \quad x^0 = a_\rho x^\rho, \quad W_\rho x^\rho = 0, \qquad (3.22)$$

где

$$W_\rho = W_{\rho\sigma\beta} \Lambda^{\sigma\beta}, \qquad (3.22')$$

представляет собой совокупность всех точек $X = x^\rho H_\rho \in \overset{*}{L}_{n-m-2}$, которым в L_m отвечают конусы (3.20), аполярные в смысле [9] конусу

$$\Lambda_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{\hat\alpha} = 0,$$

т.е. конусу (2.2), соответствующему заданной гиперплоскости (3.1). Заметим, что в формулах (3.22) величины $\Lambda^{\sigma\beta}$ определяются из формул (3.15).

Пусть точка $R = x^0 A_0 + x^\alpha A_\alpha + x \Lambda^{\hat\alpha} A_{\hat\alpha}$ принадлежит $(m+1)$- плоскости (3.14). Тогда вдоль развертки кривой (3.18) с учетом (3.16) и (1.3) будем иметь

$$\frac{dR}{\theta} = (\ldots)^0 A_0 + (\ldots)^\alpha A_\alpha + (\ldots) \Lambda^{\hat\alpha} A_{\hat\alpha} + x \tilde\Lambda^{\hat\alpha}_\alpha t^\alpha A_{\hat\alpha} + x^\alpha A^{\hat\alpha}_{\alpha\beta} t^\beta A_{\hat\alpha}.$$

Следовательно, линейная оболочка касательных к кривым $R\{t^\alpha\}$, описываемым точкой R вдоль всех кривых (3.18), принадлежит гиперплоскости $\Gamma_{n-1}(R)$, проходящей через (3.14) и (3.22), тогда и только тогда, когда

$$x^\beta \overset{*}{A}_{\beta\alpha} + x \overset{*}{\tilde\Lambda}_\alpha = 0, \qquad (3.23)$$

где

$$\overset{*}{A}_{\beta\alpha} = A^{\hat\alpha}_{\beta\alpha} \overset{*}{W}_{\hat\alpha}, \quad \overset{*}{\tilde\Lambda}_\alpha = \tilde\Lambda^{\hat\alpha}_\alpha \overset{*}{W}_{\hat\alpha} \qquad (3.24)$$

Здесь

$$\overset{*}{W}_n = W_\rho \Lambda^\rho, \quad \overset{*}{W}_\rho = m \Lambda W_\rho - b_\rho \Lambda^q W_q. \qquad (3.25)$$

Из (3.23) следует, что совокупность всех искомых точек R подпространства (3.14) образует в слое P_n прямую

$$g = (A_0,\ g^{\beta} A_{\beta} + \Lambda^{\hat{\alpha}} A_{\hat{\alpha}}), \tag{3.25}$$

где

$$g^{\beta} = -\frac{\tilde{\Lambda}^{*}_{\alpha} \overset{*}{A}{}^{\alpha\beta}}{\overset{*}{A}}. \tag{3.26}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \overset{*}{A} = \det \| \overset{*}{A}_{\alpha\beta} \|, \\ \overset{*}{A}_{\beta\alpha} \overset{*}{A}{}^{\alpha\gamma} = \delta^{\gamma}_{\beta} \overset{*}{A}. \end{gathered} \tag{3.27}$$

причем предполагается, что $\overset{*}{A} \neq 0$. При этом можно показать, что определитель $\overset{*}{A}$ в общем случае отличен от нуля. Заметим, что при определении прямой (3.25) из рассмотрения исключается случай $\overset{*}{A} = 0$, когда гиперплоскость, проходящая через (3.14) и (3.22), определяемая системой

$$\overset{*}{W}_{\hat{\alpha}} x^{\hat{\alpha}} = 0,$$

принадлежит гиперконусу $T^{m}_{(1)}$. Так как величины $\Lambda^{\hat{\alpha}}$ не равны нулю одновременно в общем случае, поскольку они в силу (3.16) относительно инвариантны, то прямая (3.25) в общем случае не лежит в $(m+1)$-плоскости (3.14).

5. Оснащающую $(n-m)$-плоскость $\overset{*}{L}_{n-m}$ или нормаль первого рода m-поверхности S_m в смысле А.П.Нордена [10] в слое P_n точки A_0 определим теперь, как линейное подпространство, проходящее через прямую (3.26) и линейное

подпространство (3.5). Если теперь эту $(n-m)$-плоскость задать в слоевых координатах системой

$$x^{\alpha} = C^{\alpha}_{\hat{\beta}} x^{\hat{\beta}}, \tag{3.28}$$

то из (3.5) и (3.26) мы найдем, что

$$C^{\alpha}_{p} = \frac{m a^{\alpha}_{p} \Lambda - \Lambda^{q} a^{\alpha}_{q} b_{p} + g^{\alpha} b_{p}}{m\Lambda}, \quad C^{\alpha}_{n} = \frac{\Lambda^{p} a^{\alpha}_{p} - g^{\alpha}}{m\Lambda}. \tag{3.29}$$

§4. Оснащения индекса k.

Рассмотренные в предыдущих параграфах некоторые геометрические образы, связанные с m-мерной поверхностью S_m и m-мерной гиперполосой в $P_{n,n}$, а так же некоторые другие геометрические образы позволяют с геометрической точки зрения сделать некоторые выводы, касающиеся существования некоторых полей оснащающих плоскостей m-поверхности S_m в $P_{n,n}$.

I. В §2 настоящей статьи были определены аналитически и геометрически инвариантные гиперконусы $T^{m}_{(k)}$, связанные с текущей точкой A_0 m-поверхности S_m в $P_{n,n}$. Оказывается, что между гиперконусом $T^{m}_{(2)}$, $(m+1)$-плоскостью (3.14) и гиперплоскостью (3.1) существует интересная геометрическая связь, которая устанавливается следующей теоремой.

Т е о р е м а I. В случае $n \leq \frac{m(m+3)}{2}$ линейное подпространство L_{m+1} является линейным полюсом [11] гиперплоскости ℓ_{n-1} относительно гиперконуса $T^{m}_{(2)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим при $n \le \frac{m(m+3)}{2}$

$$\overset{*}{\Lambda}{}^{\hat\alpha} = \underset{(2)}{G}{}^{\hat\alpha\hat\alpha_2\dots\hat\alpha_m}\, b_{\hat\alpha_2}\cdots b_{\hat\alpha_m}, \quad (b_n = -1) \qquad (4.1)$$

где величины $\underset{(2)}{G}{}^{\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_m}$ определяются по формулам (2.7), а $b_{\hat\alpha}$ - тангенциальные координаты гиперплоскости ℓ_{n-1}. Тогда, в соответствии с [II](стр.I3I7), $(m+1)$-плоскость

$$\overset{*}{L}_{m+1} = (L_m, A_{\hat\alpha})\overset{*}{\Lambda}{}^{\hat\alpha} \qquad (4.2)$$

является линейным полюсом гиперплоскости ℓ_{n-1} относительно гиперконуса $T^m_{(2)}$. Для доказательства теоремы нам надо показать, что $\overset{*}{\Lambda}{}^{\hat\alpha} = \lambda\Lambda^{\hat\alpha}$, или, в силу (3.I5),

$$\overset{*}{\Lambda}{}^{\hat\alpha} = \lambda\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha\beta}, \quad (\lambda \ne 0). \qquad (4.3)$$

С этой целью проведем фиксацию репера T в слое P_n точки A_0, при которой

$$b_p = 0, \quad b_n = -1 \qquad (4.4)$$

Геометрически это означает, что гиперплоскость ℓ_{n-1} содержит точки $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$. Из (3.2) и (4.4) следует, что $\omega^n_p = b_{p\alpha}\omega^\alpha$, т.е. согласно лемме Н.М.Остиану [I2], фиксация (4.4) общего вида. Из (2.7), (3.I5) и (4.4) получаем

$$\Lambda^n_{\alpha\beta} = -\Lambda_{\alpha\beta}.$$

Поэтому

$$\overset{*}{\Lambda}{}^{\hat\alpha} \equiv \underset{(2)}{G}{}^{\hat\alpha\hat\alpha_2\dots\hat\alpha_m}\, b_{\hat\alpha_2}\cdots b_{\hat\alpha_m} = (-1)^{m-1}\underset{(2)}{G}{}^{\hat\alpha n\dots n} =$$

$$= \frac{-1}{m}\left\{\det\|\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha_1}\Lambda_{\alpha_2}\dots\Lambda_{\alpha_m}\| + \dots + \det\|\Lambda_{\alpha_1}\cdots\Lambda_{\alpha_{m-1}}\Lambda^{\hat\alpha}_{\alpha_m}\|\right\} = \frac{1}{m}\Lambda\Lambda^n_{\alpha\beta}\Lambda^{\alpha\beta}.$$

Как видим, соотношения (4.3) справедливы, причем $\lambda = \frac{1}{m}\Lambda$.
Теорема доказана.

По аналогии с $(m+1)$-плоскостью L_{m+1} мы можем ввести в рассмотрение $(m+1)$-плоскости

$$\overset{(k)}{L}_{m+1} = (L_m, A_{\hat\alpha})\underset{(k)}{\Lambda}{}^{\hat\alpha} \quad (k = 1,2,3), \qquad (4.5)$$

где

$$\underset{(k)}{\Lambda}{}^{\hat\alpha} = \underset{(k)}{G}{}^{\hat\alpha\hat\alpha_2\dots\hat\alpha_m}\, b_{\hat\alpha_2}\cdots b_{\hat\alpha_m} \quad (b_n = -1).$$

Здесь тензоры $\underset{(k)}{G}{}^{\hat\alpha_1\dots\hat\alpha_m}$ определяются по формулам (2.7). В соответствии с [II], а также учитывая теорему I, мы получаем, что каждая $(m+1)$-плоскость (4.5) является полюсом гиперплоскооти (3.I) относительно гиперконуса $T^m_{(k)}$. Например, при $k = 2$, как это следует из (4.I) и (4.5), $(m+1)$-плоскость $\overset{(2)}{L}_{m+1}$ есть $(m+1)$-плоскость (3.I4). Поэтому эти $(m+1)$-плоскости можно использовать для нахождения прямой $g_{(k)}$, аналогичной прямой (3.25), если всюду вместо $(m+1)$-плоскости L_{m+1} брать $(m+1)$-плоскость $\overset{(k)}{L}_{m+1}$. Оснащенную $(n-m)$-плоскость (3.28) можно определить, как линейную оболочку прямой $g_{(k)}$ и линейного подпространства (3.5). Тогда в формулах (3.29) вместо величин g^α надо писать $g^\alpha_{(k)}$, которые определяются по формулам, аналогичным (3.26), только вместо $\overset{*}{\tilde\Lambda}_\alpha$ надо писать $\underset{(k)}{\overset{*}{\tilde\Lambda}}_\alpha$. Полученное таким путем оснащение m-мерной поверхности S_m

с заданным полем касательных гиперплоскостей ℓ_{n-1} будем называть оснащением индекса k. Так как гиперконусы $T^{m}_{(k)}$ определены при n и m, удовлетворяющих (2.7), то и оснащение индекса k будет определено при тех же значениях n и m, соответственно. Рассмотренное в предыдущем параграфе оснащение m-мерной гиперполосы в $P_{n,n}$ будет оснащением индекса 2.

§5. Заключение.

Из результатов предыдущих параграфов следует, что существенным при определении оснащения индекса k поверхности S_m с заданным полем касательных гиперплоскостей ℓ_{n-1} является то, что характеристический элемент каждой гиперплоскости ℓ_{n-1} слоя P_n точки A_0, т.е. элемент m-мерного многообразия, огибаемого полем гиперплоскостей ℓ_{n-1}, принадлежит соответствующей оснащающей $(n-m)$-плоскости $\overset{*}{L}_{n-m}$, проходящей так же через прямую $g_{(k)}$, геометрически определенную в предыдущем параграфе. Таким образом, каждой касательной гиперплоскости ставится в соответствие по закону (3.29), где вместо g^{α} надо писать $g^{\alpha}_{(k)}$, вполне определенная нормаль первого рода (3.28). Возникает естественная задача: для любой ли m-мерной поверхности S_m в $P_{n,n}$ можно найти касательную гиперплоскость ℓ_{n-1}, которая бы определила оснащение индекса k. Для определенности будем решать задачу для случая оснащения индекса 2, рассмотренного в §3.

Для решения поставленной задачи предположим, что каждой

текущей точке A_0 m-поверхности S_m в слое P_n каким-то образом поставлена в соответствие $(n-m)$-плоскость (3.28), где величины $C^{\alpha}_{\hat{\beta}}$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\Delta C^{\alpha}_{\hat{\alpha}} \equiv dC^{\alpha}_{\hat{\alpha}} - C^{\alpha}_{\hat{\beta}}\,\omega^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}} + C^{\gamma}_{\hat{\alpha}}\,\omega^{\alpha}_{\gamma} + \omega^{\alpha}_{\hat{\alpha}} = C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta}\,\omega^{\beta} \quad (5.1)$$

Здесь величины $C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta}$ удовлетворяют следующим квадратичным уравнениям:

$$\Delta C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta} \wedge \omega^{\beta} = 0, \quad (5.2)$$

где

$$\Delta C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta} = dC^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta} + C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta}\,\omega^{0}_{0} - C^{\alpha}_{\hat{\beta}\beta}\,\omega^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}} - C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\gamma}\,\omega^{\gamma}_{\beta} + C^{\gamma}_{\hat{\alpha}\beta}\,\omega^{\alpha}_{\gamma} +$$

$$+ C^{\alpha}_{\hat{\beta}}\,A^{\hat{\beta}}_{\gamma\beta}\,\omega^{\gamma}_{\hat{\alpha}} + C^{\sigma}_{\hat{\alpha}}\,A^{\hat{\beta}}_{\sigma\beta}\,\omega^{\alpha}_{\hat{\beta}} - C^{\gamma}_{\hat{\alpha}}\,\delta^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{0}_{\gamma} - \delta^{\alpha}_{\beta}\,\omega^{0}_{\hat{\alpha}} +$$

$$+ (C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\gamma}\,R^{\gamma}_{0\tau\beta} + C^{\gamma}_{\hat{\alpha}}\,R^{\alpha}_{0\beta\tau} + R^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta\tau} + C^{\alpha}_{\hat{\beta}}\,R^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}\tau\beta})\,\omega^{\tau}.$$

Для удобства и простоты аналитических выкладок и рассуждений проведем такую канонизацию репера m-мерной поверхности с заданным полем нормалей первого рода, при которой точки $A_0, A_{m+1}, \ldots, A_n$ располагаются в заданной $(n-m)$-плоскости $\overset{*}{L}_{n-m}$. Тогда из $x^{\alpha} = C^{\alpha}_{\hat{\alpha}}\,x^{\hat{\alpha}}$ получаем $C^{\alpha}_{\hat{\alpha}} = 0$ и система (5.I) примет вид

$$\omega^{\alpha}_{\hat{\alpha}} = C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta}\,\omega^{\beta}, \quad (5.3)$$

т.е.наша фиксация в силу леммы Н.М.Остиану [I2]будет общей.Здесь величины $C^{\alpha}_{\hat{\alpha}\beta}$ удовлетворяют квадратичным уравнениям (5.2).

Искомую гиперплоскость ℓ_{n-1}, о которой идет речь в поставленной выше задаче,мы будем задавать в виде (3.I), где неизвестные функции b_p удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (3.2),в которой функции $b_{p\alpha}$ удовлетворяют системе (3.3).Характеристический элемент (3.5) гиперплоскости ℓ_{n-1} будет принадлежать в силу (3.6) $(n-m)$-плоскости $\overset{*}{L}_{n-m}=(A_0A_{m+1}\cdots A_n)$ тогда и только тогда, когда $a^{\alpha}_p=0$.А этим условиям в силу $A=\det\|A_{\alpha\beta}\|\neq 0$ и (3.7) эквивалентны условия $b_{p\alpha}=0$.Из систем (3.2) и (3.3) в силу (5.3) получаем следующие соотношения для определения b_p .

$$b_p\overset{*}{R}{}^{n}_{n\alpha\beta}+b_p b_q\overset{*}{R}{}^{q}_{n\alpha\beta}+b_q\overset{*}{R}{}^{q}_{p\alpha\beta}+\overset{*}{R}{}^{n}_{p\alpha\beta}=0, \qquad (5.4)$$

где

$$\overset{*}{R}{}^{n}_{n\alpha\beta}=R^{n}_{n\beta\alpha}+A^{n}_{\gamma[\beta}C^{\gamma}_{|n|\alpha]}, \quad \overset{*}{R}{}^{q}_{p\alpha\beta}=R^{q}_{p\alpha\beta}+C^{\gamma}_{p[\alpha}A^{q}_{|\gamma|\beta]},$$

$$\overset{*}{R}{}^{n}_{p\alpha\beta}=R^{n}_{p\beta\alpha}+A^{n}_{\gamma[\alpha}C^{\gamma}_{|p|\beta]}, \quad \overset{*}{R}{}^{q}_{n\alpha\beta}=R^{q}_{n\alpha\beta}+A^{q}_{\gamma[\beta}C^{\gamma}_{|n|\alpha]},$$

причем величины $\overset{*}{R}{}^{\hat{\beta}}_{\hat{\alpha}\alpha\beta}$ кососимметричны по α и β .

Таким образом,мы получили систему (5.4),состоящую из $(n-m-1)\,C^2_m$ уравнений с $(n-m-1)$ неизвестными.Такая система для поверхности S_m общего вида будет иметь решения лишь в случае $m=2$.В этом случае система (5.4) будет иметь в общем случае не более 2^{n-3} решений,где $n\leq\frac{m(m+3)}{2}$.Таким образом,только для двумерной полунормализованной поверхности общего вида в P_n $(n\leq\frac{m(m+3)}{2})$ существует не более 2^{n-3} искомых гиперплоскостей ℓ_{n-1}. Во всех остальных случаях искомые гиперплоскости ℓ_{n-1} существуют лишь для m-поверхностей частного вида. Например,для m-поверхностей S_m в $P_{n,n}$ класса

$$\overset{*}{R}{}^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}\alpha\beta}\equiv 0$$

существует ∞^1 гиперплоскостей ℓ_{n-1} ,проходящих через L_m,характеристические элементы которых принадлежат заданной $(n-m)$-плоскости $\overset{*}{L}_{n-m}$.

Остановимся на случае $m=2,\ n=4$.В этом случае существуют две гиперплоскости ℓ_3 ,обладающие указанным геометрическим свойством.Пользуясь уравнениями (5.2) и (5.4),можно доказать следующие теоремы для случая $m=2$, $n=4$.

Т е о р е м а 2. К любой поверхности S_2 в $P_{4,4}$ с произволом одной функции двух аргументов можно присоединить поле оснащающих плоскостей $\overset{*}{L}_2$,каждой из которых отвечает ∞^1 гиперплоскостей,проходящих через L_2 , с характеристическими элементами,принадлежащими этим плоскостям $\overset{*}{L}_2$.

Т е о р е м а 3.Каждой поверхности S_2 в однородном пространстве P_4 с произволом четырех (трех) функций двух аргументов можно присоединить поле оснащающих плоскостей $\overset{*}{L}_2$ таких, что выполняется каждое из следующих свойств:

1/для каждой плоскости $\overset{*}{L}_2$ существуют две (одна) гиперплоскости, проходящие через L_2, характеристические элементы которых принадлежат $\overset{*}{L}_2$;

2/в плоскости $\overset{*}{L}_2$ существуют две (одна) прямые, проходящие через A_0, касательные линейные подпространства к которым принадлежат соответствующим гиперплоскостям, проходящим через L_2.

Т е о р е м а 4. К любой двумерной поверхности S_2 в $P_{4,4}$ с произволом двух функций двух аргументов можно присоединить поле нормалей первого рода $\overset{*}{L}_2$, каждой из которых отвечает не более двух гиперплоскостей, проходящих через L_2., с характеристическими элементами, принадлежащими L_2 и с прямой $g = (L_2, \Lambda^{\hat{a}} A_{\hat{a}} + g^{\alpha} A_{\alpha})$, так же принадлежащей этой оснащающей плоскости.

Л и т е р а т у р а

1. Ивлев Е.Т., Об одной нормализации поверхности пространства проективной связности. Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. 4, Калининград, 1974, 6-28.

2. Вагнер В.В., Теория поля локальных гиперполос, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 8, 1950, 197-272.

3. Лаптев Г.Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Труды Московского матем. об-ва, 2, 1953, 275-382.

4. Лаптве Г.Ф., Остиану Н.М., Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности, I, Труды геом. семинара, 3, АН СССР ВИНИТИ, М. 1971, 49-94.

5. Остиану Н.М., Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности II, Там же, 95-114

6. Гуревич Г.Б., Основы теории алгебраических инвариантов, ГИТТЛ, М.-Л., 1948.

7. Карапетян С.Е., Проективно-дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей, I, Изв. АН Арм.ССР, серия физмат наук, 1963, №6, 3-22.

8. Акивис М.А., О преобразовании поверхности при помощи фокальных семейств. Успехи матем. наук, 1961, 16, №1, 193-195.

9. Ивлев Е.Т., К многомерной геометрической интерпритации операции свертывания некоторых тензоров. Матер. итоговой науч. конф. по матем. и мех. за 1970г. I. Изд-во Томского ун-та, 1970, 121-123.

10. Норден А.П. Обобщение основной теоремы теории нормализации. Изв. высш. уч. зав. "Математика", 1966, №2, 9-19.

11. Ивлев Е.Т., О многообразии $E(L, L_m, \overset{\hat{a}}{L}_{m+1})$ в n-мерном проективном пространстве P_n $(m > 2)$. Сиб. матем. жур. 1967, т. 8, №6, 1307-1320.

12. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия. Rev. math. pures et appl. (RNR) 1962, №2, 231-240.