Study of the group connection in stratification, associated with the Grassman's manifold, was continued. It is turned out, that object of the group connection contains only simple and simplest geometric subobjects. Bortolotti's equipment assigned by field of the quasitensor on the Grassman's manifold was cosidered.

Covariant differential and covariant derivatives of the equipping quasitensor in the group connection were found. It is proved, that covariant derivatives are tensor. When outward differentiating covariant differential, the tensor of nonabsolute movings was introduced.

УДК 514.76

Р.Ф. Билялов

(Казанский государственный университет)

СПИНОРЫ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Спинорное представление ортогональной группы O(n) расширено до действия полной линейной группы GL(n) на тензорном произведении пространства метрических тензоров и пространства спиноров. Это позволяет рассматривать спиноры в произвольных реперах и в координатах. Спиноры становятся элементами расслоения, ассоциированного к главному расслоению линейных реперов. Построение ковариантных производных и производных Ли становится чисто технической задачей.

У ортогональных групп O(p,q) существуют тензорные и спинорные представления, причем последние не допускают расширения до представления объемлющей полной линейной группы GL(n), n=p+q. Поэтому для задания спиноров на римановых многообразиях вводятся поля ортогональных реперов. При переходе от одного поля ортогональных реперов к другому с помощью некоторого поля ортогональных преобразований спиноры преобразуются с помощью соответствующего поля спинорных преобразований. Эта необходимость использовать только ортогональные реперы при рассмотрении спиноров на римановых многообразиях приводит к трудностям уже при построении производной Ли спиноров. При переносе с помощью точечного бесконечно малого преобразования $x=x'+t\xi$ ортогонального репера $e=\left(e_a^\alpha\right)$ из точки $x-t\xi$ в точку x перенесенный репер $\tilde{e}(x)$ перестает быть ортогональным репером, следовательно, переход от этого репера $\tilde{e}(x)$ к реперу $e(x)$ описывается неортогональным преобразованием.

Возникает проблема расширения спинорного представления группы O(p,q) до представления объемлющей группы GL(n).

Различные попытки построения производной Ли спиноров предпринимались в работах [1,2,3,4]. Решение проблемы и ее применение к построению законов сохранения для спинорных полей были найдены в [5,6]. В работе делается попытка дать строгое математическое описание построения ковариантных производных и производных Ли спиноров на римановых многообразиях. В дальнейшем для простоты рассуждений положим q=0, т.е. ограничимся рассмотрением только собственно евклидовых пространств. Обозначим через g симметрическую матрицу, определяющую положительно определенную квадратичную форму от n переменных. G – множество таких матриц: G={g}, η – канонический вид этих матриц g.

Очевидны следующие леммы.

Лемма 1. *Для $\forall g \in G$ существует единственное положительное симметрическое преобразование S(g), удовлетворяющее условию $S(g)gS(g)=\eta$.*

Лемма 2. *Существует множество функций S, определенных на всем G={g}, удовлетворяющих условию $S^T(g)gS(g)=\eta$. Если даны две такие функции S_1 и S_2, то для $\forall g \in G$ $S_1^{-1}(g)S_2(g) \in O(n)$. Функция S определяет глобальное сечение s: $G \to GL(n)$ в главном расслоении GL(n)(G,O(n)).*

Далее, функция S, описанная в лемме 2, должна еще удовлетворять условию S(η)=I, где I – единичная матрица.

Теорема 1. *Пусть задано спинорное представление группы O(n) в пространстве $\Psi=\{\psi\}$: $L \in O(n) \to \Lambda(L)$: $\psi'=\Lambda(L)\psi$. Расширение спинорного представления группы O(n) до действия группы GL(n) на тензорном произведении $G \times \Psi$ задается преобразованиями:*

Доказательство. Аргумент $S^{-1}\left(A^{-1^T} g A^{-1}\right) A S(g)$ в законе преобразования ψ есть ортогональное преобразование, так как

в силу $\left(S^{-1}\left(A^{-1^T} g A^{-1}\right)\right)^T \eta S^{-1}\left(A^{-1^T} g A^{-1}\right) = g'$, $A^T g' A = g$, $S(g)^T g S(g) = \eta$. Если $g'' = B^{-1^T} g' B^{-1}$, $\psi''=\Lambda(S^{-1}(g'')BS(g'))\psi'$, то $g'' = (BA)^{-1^T} g (BA)^{-1}$,

$\Lambda(S^{-1}(g'')BS(g'))\Lambda(S^{-1}(g')AS(g)) = \Lambda(S^{-1}(g'')BS(g')S^{-1}(g')AS(g)) = \Lambda(S^{-1}(g'')BAS(g))$.

Таким образом, произведению BA соответствует преобразование, равное произведению преобразований, соответствующих B и A. Наконец, если $A=I$, то $g'=g$, $\psi'=\psi$. Пусть $g=\eta$, а $A=L\in O(n)$, тогда $\eta'=\eta$, $\psi'=\Lambda(L)\psi$, т.е. при сужении $G\times\Psi$ до $\eta\times\Psi$, а $GL(n)$ до $O(n)$ получается спинорное представление группы $O(n)$.

Закон преобразования матриц Дирака. Матрицы Дирака γ^α определяются из уравнений $\gamma^\alpha\gamma^\beta+\gamma^\beta\gamma^\alpha=\eta^{\alpha\beta}\cdot 1$, у них индекс α – внешний, тензорный, а матричные индексы – внутренние, спинорные, поэтому закон преобразования матриц Дирака по отношению к преобразованию $A=\left(A^\alpha_\beta\right)$ из группы $GL(n)$ постулируем в виде

Мы построили действие полной линейной группы $GL(n)$. Дальнейшая работа с этим действием облегчается, если просто брать произвольное действие полной линейной группы $GL(n)$ в виде

$$y'=f(y,A),\ A\in GL(n),$$

не уточняя структуру функции f. В нашем случае расширения спинорного представления ортогональной группы $O(n)$ имеем:

$$y=\left(\underbrace{y^1,\ldots,y^{\frac{n(n+1)}{2}}}_{g_{\alpha\beta}},\underbrace{y^{\frac{n(n+1)}{2}+1},\ldots}_{\psi}\right)^T.$$

Функция $f(x,A)$ должна удовлетворять условиям:

$$f(f(y,A),B) = f(y,BA),\ \forall A,B\in GL(n),\ f(y,I)\equiv y.$$

Можно ввести в рассмотрение поля $y(x)$ в координатах и поля $\tilde{y}(x)$ в реперах на некотором многообразии M размерности n. Закон преобразования этих полей при преобразовании координат $x'=x'(x)$: $y'(x')=f\left(y(x),\frac{\partial x'}{\partial x}\right)$ и при преобразовании реперов $e(x)=e'(x)A(x)$: $\tilde{y}'(x)=f\left(\tilde{y}(x),A(x)\right)$. Переходы от $y(x)$ к $\tilde{y}(x)$ и наоборот задаются преобразованиями: $\tilde{y}(x)=f\left(y(x),e^{-1}(x)\right)$, $y(x)=f\left(\tilde{y}(x),e(x)\right)$.

Пользуясь действием группы $GL(n)$ на пространстве переменных y, можно построить расслоение, ассоциированное к главному расслоению линейных реперов L(M), и с этой точки зрения найти ковариантные производные полей y(x) и $\tilde{y}(x)$. Они имеют вид:

где $\left(\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)^{\beta}_{\alpha}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial A^{\alpha}_{\beta}}\right)$, Sp – след матрицы, Γ(ξ) и ω(ξ) значения форм связности на векторном поле ξ в координатах и в реперах.

Имеют место тождества, получаемые дифференцированием закона умножения в группе:

$$\frac{\partial f(y,B)}{\partial y}\frac{\partial f(y,B)}{\partial A}=\frac{\partial f(y,B)}{\partial A}B,\quad \frac{\partial f(y,I)}{\partial y}=I,\quad \frac{\partial^2 f(y,I)}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f(y,B)}{\partial y\,\partial B^{\beta}_{\alpha}}\frac{\partial f(y,I)}{\partial A^{\delta}_{\gamma}}=\frac{\partial^2 f(y,I)}{\partial A^{\delta}_{\gamma}\partial B^{\beta}_{\alpha}}+\frac{\partial f(y,I)}{\partial A^{\beta}_{\gamma}}\delta^{\alpha}_{\delta},\quad \left.\frac{\partial f(f(y,B),A)}{\partial A}\right|_{A=I}=B\left.\frac{\partial f(y,A)}{\partial A}\right|_{A=B}.$$

Пользуясь этими тождествами можно доказать следующий результат.

Теорема 2. *Законы преобразования ковариантных производных имеют вид*:

В случае спинорных полей ковариантные производные расписываются следующим образом:

$$\nabla_{\xi}\tilde{g}=0,\ \nabla_{\xi}\tilde{\psi}=\partial_{\xi}\tilde{\psi}+\tfrac{1}{4}\gamma_{\alpha}\gamma^{\beta}\left(S^{-1}(\tilde{g})\left[\partial_{\xi}S(\tilde{g})+\omega(\xi)S(\tilde{g})\right]\right)^{\alpha}_{\beta}\tilde{\psi}.$$

Ввиду равенства нулю ковариантных производных от метрического тензора ковариантные производные спиноров есть спинор:

$$\nabla_{\xi}\tilde{\psi}(x)=\Lambda\left(S^{-1}(\tilde{g}(x))AS(\tilde{g}(x))\right)\nabla_{\xi}\tilde{\psi}(x).$$

Как и для тензоров, нет проблем в построении производных Ли полей y(x) и $\tilde{y}(x)$.

Теорема 3. *Производные Ли имеют вид*:

$$L_\xi y = \partial_\xi y - Sp\left(\frac{\partial f(y,I)}{\partial A}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right), \quad L_\xi \tilde{y} = \partial_\xi \tilde{y} - Sp\left(\frac{\partial f(\tilde{y},I)}{\partial A} K\right),$$

где $K = -e^{-1} L_\xi e$.

Для примера построим производную Ли от y(x) вдоль векторного поля ξ(x) в координатах. При бесконечно малом точечном преобразовании $x \to x + t\xi$ поле $y(x - t\xi)$ приобретает увлеченное значение $\tilde{y}(x)$, равное

$$f\left(y(x - t\xi), I + t\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = y(x) - t\partial_\xi y(x) + t\,Sp\left(\frac{\partial f(y,I)}{\partial A}\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) + \ldots,$$

поэтому для $L_\xi y = \lim\limits_{t \to 0}\frac{y(x) - \tilde{y}(x)}{t}$ находим выше написанную формулу.

Теорема 4. *Закон преобразования производных Ли полей* $y(x)$ *и* $\tilde{y}(x)$ *такой же, что и для ковариантных производных:*

$$L_\xi y'(x') = \frac{\partial f\left(y, \frac{\partial x'}{\partial x}\right)}{\partial y} L_\xi y(x), \quad L_\xi \tilde{y}(x) = \frac{\partial f(y,A)}{\partial y} L_\xi \tilde{y}(x).$$

Непосредственными вычислениями и путем использования тождеств, получающихся дифференцированием законов умножения на группе, доказываются следующие теоремы.

Теорема 5. $L_\xi \partial_\alpha y = \partial_\alpha L_\xi y$.

Теорема 6. $\lfloor L_\xi, L_\eta \rfloor y = L_{[\xi,\eta]} y$.

Общие формулы для производных Ли в частном случае спинорных полей приводят к следующим формулам:

$$L_\xi \psi = \nabla_\xi \psi - \tfrac{1}{4}\gamma_\alpha \gamma^\beta \left(S^{-1}(g)\left[\frac{\partial S(g)}{\partial g} L_\xi g + \nabla \xi S(g)\right]\right)_\beta^\alpha \psi.$$

Формулы для производной Ли в реперах из формулы в координатах получаются путем замены g и ψ на $\tilde{g}$ и $\tilde{\psi}$ соответственно.

Список литературы

1. *Степанов В.Е.* Дифференцирование Ли спинорных структур в римановом пространстве – времени. Дис.... канд. физ.-мат. наук. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1984.

2. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство–время. Т. 2. М.: Мир, 1988.

3. *Kosmann Y.* Derivees de Lie de spineurs // Ann. Math. Pura Appl. 1972. T. 91. Ser. 4. P. 317 – 395.

4. *Bourguignon J.-P., Gauduchon P.* Spineurs, Operateurs de Dirac et Variations de Metriques // Comm. Math. Phys. 1992. 144. P. 581 – 599.

5. *Билялов Р.Ф.* Законы сохранения для спинорных полей на римановых пространственно – временных многообразиях // Теор. и мат. физика. 1992. Т. 90. № 3. С. 369 – 379.

6. *Билялов Р.Ф.* Симметрический тензор энергии–импульса спинорных полей // Теор. и мат. физика. 1996. Т. 108. № 2. С. 306 – 314.

R.F. Biyalov

SPINORS ON RIEMANNIEN MANIFOLDS

The spinor representation of the orthogonal group O(n) is expanded to the action of the general linear group GL(n) on the tensor product of the metric tensor space and of the spinor space. This extension permits to consider the spinors in arbitrary tetrads and in coordinates. The spinors turn to the elements of the bundle, associated to principle bundle of linear tetrads. The constructions of the covariant derivatives and of the Lie derivatives turn to the purely calculating problem.

УДК 514.75

С.Ю. Волкова

(*Балтийский военно-морской институт)*

О ДВОЙСТВЕННЫХ ПРОЕКТИВНЫХ СВЯЗНОСТЯХ S-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Построены проективные линейные связности $\overset{1}{\upsilon},\overset{2}{\upsilon},\overset{3}{\upsilon}$ оснащенного χ-расслоения, ассоциированного с данным S-распределением проективного пространства P_n. Получены охваты тензоров кривизны-кручения этих связностей. Найдены аналитические условия совпадения связностей и двойственности пространств проективной связности $\overset{1}{P}_{n,n-m-1}$, $\overset{2}{P}_{n,n-m-1}$. Приведена их геометрическая интерпретация. Показано, что оснащение голономного χ-расслоения в смысле Картана индуцирует пространство $\overset{2}{P}_{n,n-m-1}$ с нулевым кручением, двойственное $\overset{1}{P}_{n,n-m-1}$.

Используется следующая схема индексов: