УДК 514.76

А. В. Шульц[1]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
tonja92@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1530-1394
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-20

Индуцированные связности двух типов на поверхности аффинного пространства

В аффинном пространстве исследуется фундаментально-групповая связность в расслоении, ассоциированном с поверхностью как многообразием касательных плоскостей. Объект кривизны фундаментально-групповой связности является тензором, содержащим два простейших подтензора касательной и нормальной линейных связностей. Построен тензор неабсолютных параллельных перенесений. Получено два охвата объекта связности. Найдены аналитические и геометрические условия совпадения двух типов охватов.

Ключевые слова: поверхность аффинного пространства, фундаментально-групповая связность, оснащение.

Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n с подвижным репером $\{A, \vec{e}_I\}$, $\vec{A}$ — радиус-вектор точки A, исходящий из некоторого центра. Перемещения репера задаются формулами

$$d\vec{A} = \omega^I \vec{e}_I, \ d\vec{e}_I = \omega_I^J \vec{e}_J, \ I, J, K, \ldots = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Поступила в редакцию 30.01.2019 г.

Базисные формы ω^I, ω_I^J аффинной группы $GA(n)$, $\dim GA(n) = n(n+1)$, действующей в пространстве A_n, удовлетворяют уравнениям Картана:

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I. \tag{2}$$

Рассмотрим m-мерную поверхность S_m $(1 \le m < n)$ в аффинном пространстве A_n. С учетом разбиения индекса $I = (i, \alpha)$ деривационные формулы (1) принимают вид

$$d\vec{A} = \omega^i \vec{e}_i + \omega^\alpha \vec{e}_\alpha, \; d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha, \; d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta. \tag{1'}$$

Произведем специализацию репера

$$R = \left\{A, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\right\} \; (i, j, k, \ldots = \overline{1, m}; \; \alpha, \beta, \gamma, \ldots = \overline{m+1, n})$$

следующим образом: поместим вершину A в текущую точку поверхности S_m, а векторы $\vec{e}_i$ — в соответствующую касательную плоскость T_m.

Из $(1')$ видно, что уравнения поверхности S_m в адаптированном репере имеют вид

$$\omega^\alpha = 0, \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j. \tag{3}$$

Если базисные формы $\omega^i = 0$, то точка A и касательная плоскость T_m фиксируются.

Замыкая первую подсистему, получим $\Lambda_{ij}^\alpha = \Lambda_{ji}^\alpha$.

Продолжая вторую подсистему, получим уравнения $\Delta\Lambda_{ij}^\alpha \wedge \omega^j = 0$, разрешая которые по лемме Картана придем к уравнениям

$$\Delta\Lambda_{ij}^\alpha = \Lambda_{ijk}^\alpha \omega^k, \Lambda_{[ij]k}^\alpha = 0, \Lambda_{i[jk]}^\alpha = 0, \tag{4}$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование, а тензорный дифференциальный оператор Δ действует по закону

$$\Delta\Lambda_{ij}^{\alpha} = d\Lambda_{ij}^{\alpha} - \Lambda_{kj}^{\alpha}\omega_i^k - \Lambda_{ik}^{\alpha}\omega_j^k + \Lambda_{ij}^{\beta}\omega_{\beta}^{\alpha},$$

то есть функции Λ_{ij}^{α} образуют тензор, который называется фундаментальным тензором поверхности S_m.

С поверхностью S_m ассоциируется главное расслоение $G(S_m)$ со следующими структурными уравнениями:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \tag{5}$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \tag{6}$$

$$D\omega_{\beta}^{\alpha} = \omega_{\beta}^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma}^{\alpha} + \omega^k \wedge \omega_{\beta k}^{\alpha}, \tag{7}$$

$$D\omega_{\alpha}^i = \omega_{\alpha}^{\beta} \wedge \omega_{\beta}^i + \omega_{\alpha}^j \wedge \omega_j^i, \tag{8}$$

где

$$\omega_{jk}^i = \Lambda_{jk}^{\alpha}\omega_{\alpha}^i, \quad \omega_{\beta k}^{\alpha} = -\Lambda_{ik}^{\alpha}\omega_{\beta}^i. \tag{9}$$

Базой главного расслоения $G(S_m)$ является поверхность S_m, а типовым слоем — подгруппа стационарности $G \subset GA(n)$ центрированной касательной плоскости T_m, причем $\dim G = (n-m)^2 + nm$.

Утверждение 1. *Расслоение $G(S_m)$ имеет фактор-расслоение $L_{m^2}(S_m)$ касательных реперов со структурными уравнениями (5, 6) и фактор-расслоение $L_{(n-m)^2}(S_m)$ нормальных реперов со структурными уравнениями (5, 7).*

Типовым слоем расслоения $L_{m^2}(S_m)$ является линейная группа $L_{m^2} = GL(m)$, действующая в центрированной касательной плоскости T_m, а типовым слоем расслоения

$L_{(n-m)^2}(S_m)$ — линейная группа $L_{(n-m)^2}=GL(n-m)$, действующая в нормальном центрированном факторпространстве $A^0_{n-m}=A_n/T_m$.

Фундаментально-групповую связность в главном расслоении $G(S_m)$ зададим с помощью форм

$$\tilde{\omega}^i_j=\omega^i_j-\Gamma^i_{jk}\omega^k,\ \tilde{\omega}^\alpha_\beta=\omega^\alpha_\beta-\Gamma^\alpha_{\beta i}\omega^i,\ \tilde{\omega}^i_\alpha=\omega^i_\alpha-\Gamma^i_{\alpha j}\omega^j. \quad (10)$$

Продифференцировав (10), получим:

$$D\tilde{\omega}^i_j=\tilde{\omega}^k_j\wedge\tilde{\omega}^i_k+\omega^k\wedge(\Delta\Gamma^i_{jk}+\omega^i_{jk})-\Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{sl}\omega^k\wedge\omega^l,$$

$$D\tilde{\omega}^\alpha_\beta=\tilde{\omega}^\gamma_\beta\wedge\tilde{\omega}^\alpha_\gamma+\omega^i\wedge(\Delta\Gamma^\alpha_{\beta i}+\omega^\alpha_{\beta i})-\Gamma^\gamma_{\beta i}\Gamma^\alpha_{\gamma j}\omega^i\wedge\omega^j, \quad (11)$$

$$D\tilde{\omega}^i_\alpha=\tilde{\omega}^j_\alpha\wedge\tilde{\omega}^i_j+\tilde{\omega}^\beta_\alpha\wedge\tilde{\omega}^i_\beta+\omega^j\wedge(\Delta\Gamma^i_{\alpha j}-\Gamma^i_{lj}\omega^l_\alpha+\Gamma^\beta_{\alpha j}\omega^i_\beta)+$$
$$+\omega^j\wedge\omega^k(\Gamma^i_{lj}\Gamma^l_{\alpha k}-\Gamma^\beta_{\alpha j}\Gamma^i_{\beta k}).$$

Согласно теореме Картана — Лаптева [2], из уравнений (11) следует, что компоненты объекта связности $\Gamma=\left\{\Gamma^i_{jk},\Gamma^\alpha_{\beta i},\Gamma^i_{\alpha j}\right\}$ удовлетворяют следующим уравнениям (см. [1]):

$$\Delta\Gamma^i_{jk}+\omega^i_{jk}=\Gamma^i_{jkl}\omega^l,$$

$$\Delta\Gamma^\alpha_{\beta i}+\omega^\alpha_{\beta i}=\Gamma^\alpha_{\beta ij}\omega^j, \quad (12)$$

$$\Delta\Gamma^i_{\alpha j}-\Gamma^i_{kj}\omega^k_\alpha+\Gamma^\beta_{\alpha j}\omega^i_\beta=\Gamma^i_{\alpha jk}\omega^k.$$

Утверждение 2. *С учетом дифференциальных уравнений* (12) *структурные уравнения* (11) *примут вид*

$$D\tilde{\omega}^i_j=\tilde{\omega}^k_j\wedge\tilde{\omega}^i_k+R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l,$$

$$D\tilde{\omega}^\alpha_\beta=\tilde{\omega}^\gamma_\beta\wedge\tilde{\omega}^\alpha_\gamma+R^\alpha_{\beta ij}\omega^i\wedge\omega^j,$$

$$D\tilde{\omega}^i_\alpha=\tilde{\omega}^j_\alpha\wedge\tilde{\omega}^i_j+\tilde{\omega}^\beta_\alpha\wedge\tilde{\omega}^i_\beta+R^i_{\alpha jk}\omega^j\wedge\omega^k,$$

где компоненты объекта кривизны $R=\left\{R^i_{jkl}, R^\alpha_{\beta ij}, R^i_{\alpha jk}\right\}$ *выражаются по формулам*

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]}, \quad R^\alpha_{\beta ij} = \Gamma^\alpha_{\beta[ij]} - \Gamma^\gamma_{\beta[i}\Gamma^\alpha_{\gamma j]}, \\ R^i_{\alpha jk} = \Gamma^i_{\alpha[jk]} + \Gamma^i_{l[j}\Gamma^l_{\alpha k]} - \Gamma^\beta_{\alpha[j}\Gamma^i_{\beta k]}, \tag{13}$$

причем альтернирование выполняется по крайним индексам в квадратных скобках.

Продолжая (12), получим сравнения для пфаффовых производных компонент объекта $\Gamma=\left\{\Gamma^i_{jkl}, \Gamma^\alpha_{\beta ij}, \Gamma^i_{\alpha jk}\right\}$ (ср. [1]):

$$\Delta\Gamma^i_{jkl} - \Gamma^i_{jp}\omega^p_{kl} - \Gamma^i_{sk}\omega^s_{jl} + \Gamma^p_{jk}\omega^i_{pl} + \Lambda^\alpha_{jkl}\omega^i_\alpha \cong 0\,, \\ \Delta\Gamma^\alpha_{\beta ij} - \Gamma^\alpha_{\beta k}\omega^k_{ij} - \Gamma^\alpha_{\gamma i}\omega^\gamma_{\beta j} + \Gamma^\gamma_{\beta i}\omega^\alpha_{\gamma j} - \Lambda^\alpha_{kij}\omega^k_\beta \cong 0\,, \tag{14} \\ \Delta\Gamma^i_{\alpha jk} - \Gamma^i_{\alpha l}\omega^l_{jk} + \Gamma^l_{\alpha j}\omega^i_{lk} - \Gamma^i_{\beta j}\omega^\beta_{\alpha k} - \Gamma^i_{ljk}\omega^l_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha jk}\omega^i_\beta \cong 0\,,$$

где символ $\cong$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^i. При альтернировании в силу условий (4_3) сравнения $(14_{1,2})$ упрощаются:

$$\Delta\Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^i_{s[k}\omega^s_{jl]} + \Gamma^p_{j[k}\omega^i_{pl]} \cong 0, \\ \Delta\Gamma^\alpha_{\beta[ij]} - \Gamma^\alpha_{\gamma[i}\omega^\gamma_{\beta j]} + \Gamma^\gamma_{\beta[i}\omega^\alpha_{\gamma j]} \cong 0. \tag{15}$$

Применяя оператор Δ к выражениям (13) и учитывая соотношения (9, 12, 15), получим следующие сравнения (ср. [1]):

$$\Delta R^i_{jkl} \cong 0,\ \Delta R^\alpha_{\beta ij} \cong 0,\ \Delta R^i_{\alpha jk} - R^i_{ljk}\omega^l_\alpha + R^\beta_{\alpha jk}\omega^i_\beta \cong 0\,. \tag{16}$$

Из сравнений (16) вытекает

Теорема 1. *Объект кривизны* R *фундаментально-групповой связности является тензором, содержащим два простейших подтензора касательной и нормальной линейных связностей* $R^i_{jkl}, R^\alpha_{\beta ij}$.

Оснащение поверхности S_m состоит в присоединении к каждой ее точке $(n-m)$-мерной плоскости N_{n-m}: $T_m + N_{n-m} = A_n$.. Нормаль N_{n-m} зададим совокупностью векторов $\vec{E}_\alpha = \vec{e}_\alpha + \lambda_\alpha^i \vec{e}_i$.

Уравнения инвариантности нормали имеют вид

$$\Delta\lambda_\alpha^i + \omega_\alpha^i = \lambda_{\alpha j}^i \omega^j . \tag{17}$$

Продолжая их, найдем уравнения на пфаффовы производные $\lambda_{\alpha j}^i$ оснащающего квазитензора λ_α^i:

$$\Delta\lambda_{\alpha j}^i + \lambda_\alpha^k \omega_{kj}^i - \lambda_\beta^i \omega_{\alpha j}^\beta = \lambda_{\alpha jk}^i \omega^k .$$

Вводя формы связности (9) в дифференциальные уравнения (16), получим $\nabla\lambda_\alpha^i = \nabla_j \lambda_\alpha^i \omega^j$, где ковариантный дифференциал $\nabla\lambda_\alpha^i$ и ковариантные производные $\nabla_j \lambda_\alpha^i$ объекта λ_α^i выражаются по формулам

$$\nabla\lambda_\alpha^i = d\lambda_\alpha^i - \lambda_\beta^i \tilde{\omega}_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^j \tilde{\omega}_j^i + \tilde{\omega}_\alpha^i ,$$

$$\nabla_j \lambda_\alpha^i = \lambda_\beta^i \Gamma_{\alpha j}^\beta - \lambda_\alpha^k \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{\alpha j}^i + \lambda_{\alpha j}^i . \tag{18}$$

Утверждение 3. *Ковариантные производные квазитензора λ_α^i образуют тензор.*

Действительно, применяя к (18) оператор Δ и учитывая (12, 17), получим сравнения $\Delta(\nabla_j \lambda_\alpha^i) \cong 0$.

Внешний дифференциал от ковариантного дифференциала $\nabla\lambda_\alpha^i$ можно привести к виду

$$D\nabla\lambda_\alpha^i = \nabla\lambda_\alpha^j \wedge \tilde{\omega}_j^i - \nabla\lambda_\beta^i \wedge \tilde{\omega}_\alpha^\beta + S_{\alpha jk}^i \omega^j \wedge \omega^k . \tag{19}$$

где $S_{\alpha jk}^i$ имеет вид (ср. [1])

$$S_{\alpha jk}^i = R_{\alpha jk}^i - \lambda_\beta^i R_{\alpha jk}^\beta + \lambda_\alpha^l R_{ljk}^i , \quad \Delta S_{\alpha jk}^i \cong 0 .$$

Утверждение 4. *Объект кручения* $S^i_{\alpha jk}$ *является тензором.*

Из уравнений (19) видно, что если $S^i_{\alpha jk}=0$, то система $\nabla\lambda^i_\alpha=0$ вполне интегрируема, то есть задает абсолютное параллельное перенесение, следовательно, тензор $S^i_{\alpha jk}$ будет называться тензором неабсолютных параллельных перенесений.

Фундаментальный тензор $\Lambda=\left\{\Lambda^\alpha_{ij}\right\}$ и оснащающий квазитензор $\lambda=\left\{\lambda^i_\alpha\right\}$ позволяют охватить объект связности Γ двумя способами. В первом случае, рассмотрев формулы (12) и входящие в них выражения (9), получим охват объекта связности $\overset{1}{\Gamma}=\left\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk},\overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i},\overset{1}{\Gamma}{}^i_{\alpha j}\right\}$ по формулам

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}=\Lambda^\alpha_{jk}\lambda^i_\alpha,\ \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i}=-\Lambda^\alpha_{ij}\lambda^j_\beta,\ \overset{1}{\Gamma}{}^i_{\alpha j}=-\Lambda^\beta_{kj}\lambda^i_\beta\lambda^k_\alpha. \qquad (20)$$

Обращение в нуль тензора $\nabla_j\lambda^i_\alpha$ имеет инвариантный смысл и приводит ко второму охвату для компонент $\Gamma^i_{\alpha j}$:

$$\overset{2}{\Gamma}=\left\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk},\overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta i},\overset{2}{\Gamma}{}^i_{\alpha j}\right\},\ \overset{2}{\Gamma}{}^i_{\alpha j}=\lambda^i_{\alpha j}+\lambda^i_\beta\,\overset{0}{\Gamma}{}^\beta_{\alpha j}-\lambda^k_\alpha\,\overset{0}{\Gamma}{}^i_{kj}. \qquad (21)$$

Замечание: *Полученные охваты объектов аффинной и линейной связностей удовлетворяют условию*

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}\,\lambda^k_\alpha+\overset{0}{\Gamma}{}^\beta_{\alpha j}\,\lambda^i_\beta=0.$$

Учитывая (17) в (12), получим:

$$\Delta\Gamma^i_{jk}-\Lambda^\alpha_{jk}\Delta\lambda^i_\alpha=(\Gamma^i_{jkl}-\Lambda^\alpha_{jk}\lambda^i_{\alpha l})\omega^l,$$

$$\Delta\Gamma^\alpha_{\beta i}-\Lambda^\alpha_{ji}\Delta\lambda^j_\beta=(\Gamma^\alpha_{\beta ij}+\Lambda^\alpha_{ki}\lambda^k_{\beta j})\omega^j,$$

$$\Delta\Gamma^i_{\alpha j}+\Lambda^\beta_{kj}\lambda^i_\beta\Delta\lambda^k_\alpha+\Lambda^\beta_{kj}\lambda^k_\alpha\Delta\lambda^i_\beta=(\Gamma^i_{\alpha jk}+\Lambda^\beta_{lj}\lambda^i_\beta\lambda^l_{\alpha k}+\Lambda^\beta_{lj}\lambda^l_\alpha\lambda^i_{\beta k})\omega^k.$$

Соберем слагаемые под оператором Δ следующим образом:

$$\Delta(\Gamma^i_{jk} - \Lambda^\alpha_{jk}\lambda^i_\alpha) = (\Gamma^i_{jkl} - \Lambda^\alpha_{jk}\lambda^i_{\alpha l} - \Lambda^\alpha_{jkl}\lambda^i_\alpha)\omega^l\,,$$

$$\Delta(\Gamma^\alpha_{\beta i} + \Lambda^\alpha_{ji}\lambda^j_\beta) = (\Gamma^\alpha_{\beta ij} + \Lambda^\alpha_{ki}\lambda^k_{\beta j} + \Lambda^\alpha_{kij}\lambda^k_\beta)\omega^j\,, \qquad (22)$$

$$\Delta(\Gamma^i_{\alpha j} + \Lambda^\beta_{kj}\lambda^i_\beta\lambda^k_\alpha) = (\Gamma^i_{\alpha jk} + \Lambda^\beta_{ljk}\lambda^i_\beta\lambda^l_\alpha + \Lambda^\beta_{lj}\lambda^i_\beta\lambda^l_{\alpha k} + \Lambda^\beta_{lj}\lambda^l_\alpha\lambda^i_{\beta k})\omega^k.$$

Тогда

$$\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jkl} = \Lambda^\alpha_{jk}\lambda^i_{\alpha l} + \Lambda^\alpha_{jkl}\lambda^i_\alpha\,, \quad \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta ij} = -\Lambda^\alpha_{ki}\lambda^k_{\beta j} - \Lambda^\alpha_{kij}\lambda^k_\beta\,,$$

$$\overset{1}{\Gamma}{}^i_{\alpha jk} = -\Lambda^\beta_{ljk}\lambda^i_\beta\lambda^l_\alpha - \Lambda^\beta_{lj}\lambda^i_\beta\lambda^l_{\alpha k} - \Lambda^\beta_{lj}\lambda^l_\alpha\lambda^i_{\beta k}\,.$$

Пусть $\nabla_j\lambda^i_\alpha = 0$, тогда из (18—21) следует:

$$\overset{2}{\Gamma}{}^i_{\alpha j} = \lambda^i_{\alpha j} - 2\Lambda^\beta_{jk}\lambda^k_\alpha\lambda^i_\beta,$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^i_{\alpha jk} = -2(\Lambda^\beta_{lj}\lambda^i_\beta\lambda^l_{\alpha k} + \Lambda^\beta_{jl}\lambda^l_\alpha\lambda^i_{\beta k} + \Lambda^\beta_{jkl}\lambda^k_\alpha\lambda^i_\beta)\,.$$

Найдем аналитические условия совпадения двух типов охватов:

$$\overset{1}{\Gamma}{}^i_{\alpha j} = \overset{2}{\Gamma}{}^i_{\alpha j}, \quad -\Lambda^\beta_{kj}\lambda^i_\beta\lambda^k_\alpha = \lambda^i_{\alpha j} - 2\Lambda^\beta_{jk}\lambda^k_\alpha\lambda^i_\beta, \quad \lambda^i_{\alpha j} = \Lambda^\beta_{jk}\lambda^k_\alpha\lambda^i_\beta \quad .$$

Найдем геометрические условия совпадения:

$$d\vec{E}_\alpha = (\omega^\beta_\alpha + \lambda^i_\alpha\omega^\beta_i)\vec{E}_\beta + (\lambda^i_{\alpha j} - \lambda^k_\alpha\lambda^i_\beta\Lambda^\beta_{kj})\omega^j\vec{e}_i\,,$$

$$d\vec{E}_\alpha = (\omega^\beta_\alpha + \lambda^i_\alpha\omega^\beta_i)\vec{E}_\beta \quad ,$$

тогда плоскость $N_{n-m} = span(\vec{E}_\alpha)$ неподвижна.

Теорема 2. *Два типа охватов совпадают тогда и только тогда, когда плоскость N_{n-m} неподвижна.*

Подставив (10) в уравнения (12), получим:

$$\nabla_l \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl} + \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jl} + \Gamma^i_{js}\Gamma^s_{kl} - \Gamma^s_{jk}\Gamma^i_{sl} - \Lambda^\alpha_{kj}\Gamma^i_{\alpha l},$$

$$\nabla_j \Gamma^\alpha_{\beta i} = \Gamma^\alpha_{\beta ij} + \Gamma^\alpha_{\gamma i}\Gamma^\gamma_{\beta j} + \Gamma^\alpha_{\beta k}\Gamma^k_{ij} - \Gamma^\gamma_{\beta i}\Gamma^\alpha_{\gamma j} + \Lambda^\alpha_{ki}\Gamma^k_{\beta j}.$$

Найдем $\overset{1}{\nabla}_l \Gamma^i_{jk}, \overset{2}{\nabla}_l \Gamma^i_{jk}, \overset{1}{\nabla}_j \Gamma^\alpha_{\beta i}, \overset{2}{\nabla}_j \Gamma^\alpha_{\beta i}$:

$$\overset{1}{\nabla}_l \Gamma^i_{jk} = \Lambda^\alpha_{jk}\lambda^i_{\alpha l} + \Lambda^\alpha_{jkl}\lambda^i_\alpha + \Lambda^\alpha_{sk}\Lambda^\beta_{jl}\lambda^i_\alpha\lambda^s_\beta + \Lambda^\alpha_{js}\Lambda^\beta_{kl}\lambda^i_\alpha\lambda^s_\beta,$$

$$\overset{2}{\nabla}_l \Gamma^i_{jk} = \Lambda^\alpha_{jkl}\lambda^i_\alpha + \Lambda^\alpha_{js}\Lambda^\beta_{kl}\lambda^i_\alpha\lambda^s_\beta, \tag{23}$$

$$\overset{1}{\nabla}_j \Gamma^\alpha_{\beta i} = -\Lambda^\alpha_{ki}\lambda^k_{\beta j} - \Lambda^\alpha_{kij}\lambda^k_\beta - \Lambda^\alpha_{lk}\Lambda^\gamma_{ij}\lambda^k_\gamma\lambda^l_\beta - \Lambda^\alpha_{lj}\Lambda^\gamma_{ki}\lambda^l_\gamma\lambda^k_\beta,$$

$$\overset{2}{\nabla}_j \Gamma^\alpha_{\beta i} = -\Lambda^\alpha_{kij}\lambda^k_\beta - \Lambda^\alpha_{lj}\Lambda^\gamma_{ki}\lambda^k_\beta\lambda^l_\gamma - \Lambda^\alpha_{lk}\Lambda^\gamma_{ij}\lambda^k_\gamma\lambda^l_\beta - \Lambda^\alpha_{ki}\Lambda^\gamma_{jl}\lambda^k_\gamma\lambda^l_\beta.$$

Проальтернируем равенства (20) по крайним индексам:

$$\overset{1}{\nabla}_{[l} \Gamma^i_{jk]} = \overset{0}{R}{}^i_{jkl}, \overset{2}{\nabla}_{[l} \Gamma^i_{jk]} = 0, \overset{1}{\nabla}_{[j} \Gamma^\alpha_{\beta i]} = \overset{0}{R}{}^\alpha_{\beta ij}, \overset{2}{\nabla}_{[j} \Gamma^\alpha_{\beta i]} = 0.$$

Теорема 3. *Альтернации ковариантных производных компонент объектов аффинной и линейной связностей первого типа равны соответствующим компонентам тензора кривизны, а для второго типа они обращаются в нуль.*

Список литературы

1. *Сырокваншина А.Н.* Параллельные перенесения нормали поверхности аффинного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1999. Вып. 30. С. 84—88.

2. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—248.

A. Shults[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
[1] tonja92@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1530-1394
doi: 10.5922/0321-4796-2019-50-20

Induced connections of two types on a surface of an affine space

Submitted on January 30, 2019

In the affine space the fundamental-group connection in the bundle associated with a surface as a manifold of tangent planes is investigated. The principal bundle contains a quotient bundle of tangent frames, the typical fiber of which is a linear group acting in a centered tangent plane and a quotient bundle of normal frames, the typical fiber of which is a linear group acting inefficiently in a normal quotient space. The curvature object of the fundamental-group connection is a tensor that contains two primary subtensors tangent and normal linear connections. The tensor of non-absolute parallel transference is constructed. Two envelopment of the connection object is obtained. Analytic and geometric conditions of coincidence of two types of envelopment are found. The covariant derivatives of equipping quasitensor form a tensor. The alternations of the covariant derivatives of the objects of the affine and linear connections of the first type are equal to the corresponding components of the curvature tensor and for the second type they vanish.

Keywords: surface of affine space, fundamental-group connection, equipment.

References

1. *Syrokvashina, A.N.:* Parallel displacements of the surface normal affine space. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 30, 84—88 (1999) (in Russian).

2. *Evtushik, L.E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. Journal of Soviet Mathematics, **14**:6, 1573—1719 (1980).